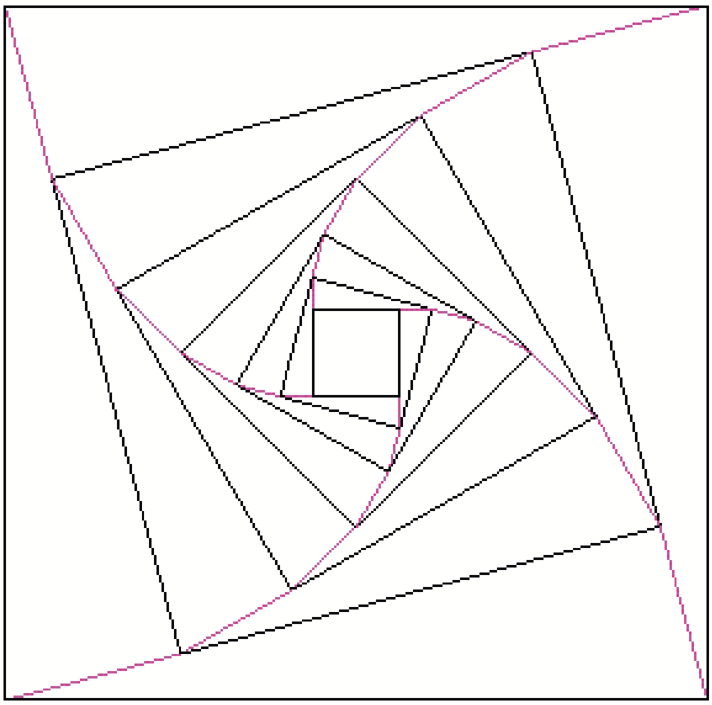
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 78
FEBRERO DE 2008

ÍNDICE

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y en Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3005
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 6248

Todos lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse
a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
`http://www.sociedadpuigadam.es`

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2008

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2008 para el sábado *día 29 de marzo de 2008*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos, si procede.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

Nota sobre la cuota anual de la Federación

Como ya saben nuestros socios, la cuota anual consta de dos partes: la de nuestra Sociedad, que está establecida desde hace años por la Asamblea General en 21 euros anuales, y la que se abona a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Esta última ya fue elevada hace dos años de 12 a 19 euros, lo que supone automáticamente que el recibo anual que se pasa asciende a 40 euros, lo mismo que el pasado año 2007. Durante el presente curso, el recibo anual se ha pasado en diciembre (en vez de en febrero, como solía hacerse) porque la Federación requiere cerrar cuentas antes de fin de año.

La Junta Directiva

XXVI Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y el

Colegio de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) *Primer nivel*: alumnos de 3º de E.S.O.
b) *Segundo nivel*: alumnos de 4º de E.S.O.
c) *Tercer nivel*: alumnos de 1º Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *7 de junio del 2008* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 7 de Mayo del 2008, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid - Fax: 91 394 4662
Correo electrónico : `jetayo@mat.ucm.es`

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2007-2008.

VII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

Como viene siendo habitual, el penúltimo sábado de noviembre es un día señalado en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Organizado por nuestra Sociedad, y con la colaboración de esta Facultad, se celebró en sus aulas el VII Concurso Intercentros. La participación fue análoga a la de los últimos años y el interés y entusiasmo de los participantes nos demuestra, una vez más, que disfrutar resolviendo problemas de Matemáticas no está reñido con el sano ejercicio de competir.

Este año hemos modificado en un punto las Bases del Concurso, cambiando ligeramente la estructura de la prueba por equipos. Dicha prueba se realiza ahora en tres niveles diferentes, por lo que hay, entonces, tres calificaciones en la misma, no como hasta ahora en que los seis componentes de cada equipo atacaban todos los problemas, con lo que bastaba que hubiera un estudiante muy bueno para obtener puntuación muy alta en dicha prueba.

Todos los enunciados del concurso pueden verse en la página web de nuestra Sociedad: `www.sociedadpuigadam.es`

A título de ejemplo, aquí tenéis algunos problemas que pusieron en aprietos a los estudiantes.

En la prueba por equipos, a los chicos de 3º-4º ESO se les planteó: *Juan le dice a Luisa: si me das tres monedas, yo tendré n veces las que tú tengas. ¡Ya! -le responde Luisa- pero si tú me das a mí n monedas, entonces yo tendré el triple de las que te quedan a ti. ¿Para qué valores de n son verdaderas estas dos afirmaciones?*

O, en la prueba individual de Bachillerato: *Antonio y Benito juegan con otros 14 jugadores un torneo de tenis, sin cabezas de serie, por el sistema habitual, es decir, eliminando en cada partido al perdedor. Si los 16 jugadores son exactamente igual de buenos, ¿cuál es la probabilidad de que Antonio y Benito lleguen a enfrentarse?.*

He aquí la relación de ganadores en esta VII edición.

Centros Ganadores

1. IES José Luis Sampedro (Tres Cantos)
2. Colegio Ntra. Sra. de Las Maravillas
3. Liceo Francés

Estudiantes Ganadores

Primer Nivel (1º y 2º de E.S.O.)

1. Jaime Mendizábal Roche (2º ESO, IES Ramiro de Maeztu)
2. Fernando Barbas Espa (2º ESO, IES San Juan Bautista)

Segundo Nivel (3º y 4º de E.S.O.)

1. Diego Peña Castillo (3º ESO, Colegio Amor Misericordioso)
2. Jesús Sánchez Díaz (4º ESO, Colegio Vedruna)

Tercer Nivel (Bachillerato)

1. Diego Izquierdo Arseguet (2º Bach., Liceo Francés)
2. David Alfaya Sánchez (2º Bach., IES José Luis Sampedro)

Enhorabuena a todos.

Joaquín Hernández

Problemas propuestos en la Fase Local de la XLIV Olimpíada Matemática Española en los distritos de Madrid

Se celebró en Madrid el viernes 18 y sábado 19 de enero de 2008, proponiéndose tres problemas en cada sesión de tres horas y media, no estando permitido el uso de calculadoras. Cada problema se calificaba sobre 7 puntos.

Problema 1. Demuestra que no existen enteros *a, b, c, d* tales que el polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a \neq 0)$, cumpla que $P(4) = 1$ y $P(7) = 2$.

Problema 2. En un rectángulo *ABCD*, elegimos puntos *E* y *F* en el lado *AB* de modo que *AE* = *EF*. La perpendicular a *AB* por *E* corta a la diagonal *AC* en el punto *G*. Los segmentos *FD* y *BG* se cortan en *H*. Probar que los triángulos *FBH* y *GHD* tienen la misma área.

Problema 3. Encontrar todos los enteros *a, b* y *c* que verifican:

$$|a+b| + c = 19$$
$$ab + |c| = 97$$

Problema 4. ¿Qué número es mayor: $999!$ ó 500^{999}? Justifica la respuesta.

Problema 5. Se consideran 17 enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestra que hay al menos una pareja de estos números cuyo producto es un cuadrado perfecto.

Problema 6. Dibujamos en el plano un cuadrilátero convexo *ABCD* en el que las diagonales *AC* y *BD* se cortan en el punto *O*. Si las longitudes de sus lados y de sus diagonales son racionales, demuestra que la longitud OA es también racional.

Nota: La Crónica con los ganadores se publicará, una vez que se haya calificado, en el próximo número del Boletín.

Presentación del Prof. Bruno D'Amore

Doctor en Matemática, Doctor en Filosofía y Doctor en Pedagogía por la Universidad de Bolonia y PhD en *Mathematics Educacion* por la Universidad de Nitra (Eslovaquia) es "Full Professor" de Didáctica de la Matemática en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Bolonia y enseña en las Facultades de Ciencias de la Formación de las Universidades de Bolonia, de la Libre Universidad de Bolzano y de la Alta Escuela Pedagógica de Locarno (Suiza).

Enseña en cursos de Doctorado de la Universidad Distrital de Bogotá y colabora en doctorados de las Universidades de Bologna-Palermo, de Alicante, de Bratislava y Nitra (Eslovaquia) y México DF.

Es responsable científico del Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Bolonia (*RSDDM*, 42 investigadores) y de numerosos proyectos de investigación nacionales e internacionales.

Es fundador y director científico del Congreso Nacional "Encuentros con la Matemática" de Castel San Pietro Terme, el mayor de los anuales en Europa (este año su edición 22). Es fundador y director cientifico de la revista *La matematica e la sua didattica* (Editorial Pitagora, Bolonia) y miembro del Comité Científico de numerosas revistas internacionales de investigación en Italia, España, México, Chipre, Grecia, Colombia, Eslovaquia, Venezuela, etc. Es miembro del grupo de investigación Mescud de la Universidad Distrital de Bogotá (Colombia). Es director de diferentes colecciones de varias editoriales. Es autor de más de cien libros de matemática (didáctica y divulgación), cuya lista completa se encuentra en el sitio del *RSDDM.*

Es miembro del Comité local de organización del Congreso Internacional que se celebrará en Roma en marzo 2008 (en el centenario del I congreso ICME 1908). En este congreso presenta con Martha Isabel Fandiño Pinilla un trabajo al WG5 (organizado por Gilah Leder y Luis Radford): *The evolution of theoretical framework in mathematics education*.

Por último, deseamos mostrar nuestro agradecimiento al Prof. Bruno D'Amore, por publicar en nuestro Boletín el artículo incluido a continuación.

José María Sordo Juanena

El cero, de obstáculo epistemológico a obstáculo didáctico

Bruno D'Amore

Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia
Facultad de Ciencias de la Formación, Universidad de Bolzano, Italia
Alta Escuela Pedagógica, Locarno, Suiza
Mescud, Doctorado de investigación, Universidad Distrital, Bogotá, Colombia

damore@dm.unibo.it - www.dm.unibo.it/rsddm

Abstract

Is it really true that zero is not a spontaneous concept for children in pre-schooling age? Is it really true that the difficulty of its conceptual construction is based on the evident fact that it is an epistemological obstacle? In this text we show, through dialogues with children ranging in age from three to six, that the generation of zero both as a digit and a cardinal is fully present and spontaneous. We thus suppose that at the origin of zero learning difficulties are also didactic obstacles, created by the widespread trend to avoid a spontaneous introduction of this concept based on the experience, already present, of children of that age. Therefore it is not zero itself an obstacle, but pseudo-didactic convictions in this regard.

Resumen

¿El cero es realmente un concepto no espontáneo para los niños en edad pre-escolar? ¿Es verdad que la dificultad de su construcción conceptual radica en el evidente hecho que se trata de un obstáculo epistemológico?. En este texto se muestra, gracias a coloquios con niños entre tres y seis años, que la génesis del cero, tanto como cifra como cardinal, es espontánea en ellos. Se parte, por lo tanto, de la hipótesis de que en el origen de las dificultades en el aprendizaje del cero existen también obstáculos didácticos, creados por la difundida

tendencia de evitar una introducción espontánea de dicho concepto, basada en la experiencia ya vivida por niños de esta edad. No es por lo tanto el cero en sí mismo, lo que constituye un obstáculo, sino las relativas convicciones pseudo-didácticas.

1. El cero está presente en la vida de todos los días

Comienzo con una ilustre observación hecha por Alfred North Whitehead:

«(...) para las normales actividades cotidianas, el cero, de hecho, no nos sirve. Ninguno va al mercado a comprar cero pescados. El cero es, en un cierto sentido, el número cardinal más civilizado de todos y su uso nos viene impuesto de las exigencias ligadas al ejercicio de una refinada racionalidad»
(cit. en Seife, 2000, pag. 12).

Alfred N. Whitehead [1861-1947]

Veamos cómo un gran pensador y científico contemporáneo nos introduce en aquel refinado *número natural* que el ser humano ha empleado milenios en concebir y crear, hasta su incorporación en el lenguaje y en el mundo científico.
Pero es falso afirmar que el cero no se presenta inmediatamente en la vida de todos los días:

- los cronómetros y el tiempo parten de cero; en los relojes digitales podemos leer 00:00 al sonar la medianoche, y sólo después de un minuto leemos 00:01; cuando se llega a esta escritura, habrá pasado un lapso de tiempo, sesenta segundos; pero al inicio de la escritura leemos cero y no uno.
- en la balanza, en ausencia de objetos sobre el plato, esperamos que aparezca cero.
- si pensamos en los cheques: cualquiera aprende rápidamente el uso del cero como cifra para llegar a escribir números siempre más grandes.
- ...

Ciertamente, existen algunas incongruencias:

- el primer ordinal en matemática es el cero, pero en la vida cotidiana es el uno;
- nadie contaría sus monedas a partir de cero.

pero tiene sentido expresar el cardinal de un conjunto vacío, activando de esta forma la percepción, *incluso física,* del concepto de cero.

2. Construir el conocimiento de cero

Sin embargo: una cosa es afirmar que el ser humano ha creado antiguamente el concepto de cero, y otra muy distinta entender cómo una persona, hoy en día, se construye este conocimiento...

Jean Piaget [1896 – 1980]

Afirmaba Jean Piaget (cit. en: Piattelli Palmarini, 1980, pag. 26):

«[...] o la matemática es parte de la naturaleza, y entonces deriva de la construcción humana, creadora de nuevos conceptos, o la matemática tiene origen en un universo platónico y sobre-sensible, y en este caso se necesitaría demostrar a través de qué medios psicológicos es posible adquirir su conocimiento, aspecto que nunca antes se ha tomado en consideración».

Si este tipo de discusiones vale relativamente para el número natural genérico, la misma discusión vale para el cero, número natural específico.

¿De qué manera y siguiendo cuáles caminos un aprendiz construye el objeto "cero"?.

A este punto es necesario distinguir inmediatamente entre tres categorías de objetos matemáticos:

- cero como ordinal,
- cero como cardinal,
- cero como cifra.

Estos tres objetos matemáticos, conceptualmente muy distintos, pueden incluso coincidir, una vez adquirida una oportuna competencia; los tres objetos deberían contribuir, cada uno por su cuenta, en la construcción del concepto general “cero”.

El interés de esta situación es notable, dado que ilustres autores han declarado la imposibilidad del niño de construir el objeto “cero”. Pero: ¿de qué cero se trata?, ¿del cero *cardinal*?, ¿del cero *ordinal*?, o ¿del cero *cifra*?. ¿Es verdad que para un niño es imposible construir alguno de estos tres conceptos?.

3. El cero, obstáculo epistemológico

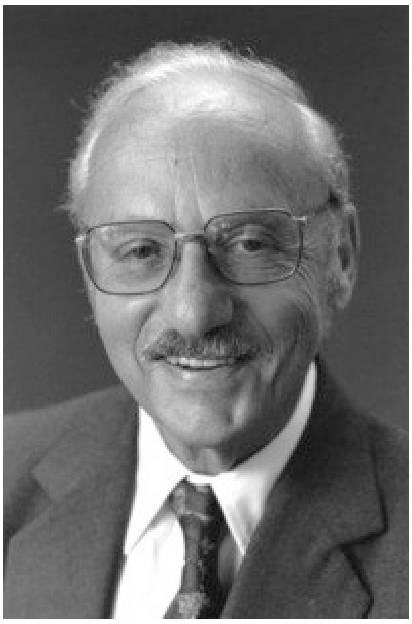
Dada la historia, larga, controvertida y compleja, del objeto “cero”, nos viene a la mente inmediatamente el hecho de que nos encontramos frente a un claro ejemplo de obstáculo epistemológico.

Lo demuestro en seguida, recordando brevemente la historia, concordando con la siguiente afirmación de Tobias Dantzig:

«En la historia de la cultura, el descubrimiento del cero emergerá siempre como una de las más grandes conquistas individuales del género humano»

(cit. en: Seife, 2000, pag. 18).

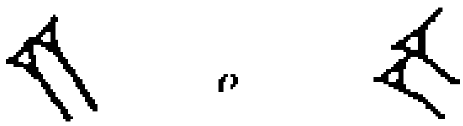
[La única duda que tengo, es en el uso del término “descubrimiento”: yo creo que se trata de una verdadera “creación” del ser humano, una creación socialmente compartida].



Tobias Dantzig [1884-1956]

En el sistema aditivo - posicional con bases mixtas (diez, veinte y sesenta) de los Sumerios antes y de los Babilonios después, hubo necesidad de un signo especial para separar las cifras, es decir, para separar los puestos vacíos; es como si escribiéramos 3◘2 para indicar 302; el signo ◘ estaría indicando que entre las 3 centenas y el 2 de las unidades, el puesto de las decenas está vacío. En tabletas fechadas entre el $^{-}3000$ y el $^{-}2000$ no existe ni siquiera el espacio vacío (como en una proveniente de Uruk y conservada en el museo de Louvre, inventariada con el número AO 17264), lo que crea cierta incomodidad a quien la está interpretando.

Entre el $^{-}1700$ y el $^{-}400$ se hace cada vez más frecuente el espacio vacío. Mientras que en la época seleúcida (entre el $^{-}311$ y la primera mitad del I siglo) aparece finalmente un signo expresamente destinado para indicar dicho espacio vacío sin crear equívocos (como en la tableta proveniente de Babilonia y conservada en el British Museum, inventariada con el número BM 32651).

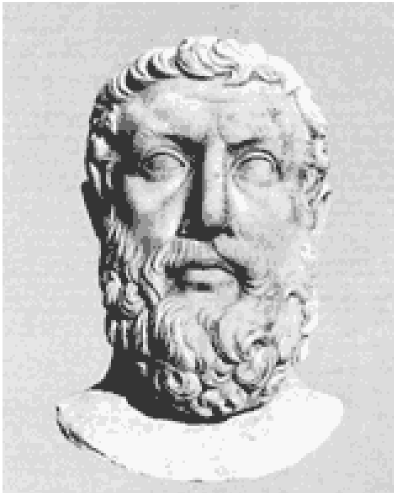


Signos usados por los Babilónicos para indicar,
en la escritura numérica en época selénica, un espacio vacío.

Una reflexión es necesaria: en nuestro actual sistema, 0 es una cifra en todo y por todo; en el sistema babilonio antiguo el signo introducido significa “ausencia” y no tiene la función de numeral. Puede pensarse como una diferencia no significativa, pero es así: aceptar un signo numeral específico que indica o el vacío o la nada o la ausencia como cifra propiamente dicha indicando un numeral, es un acto de gran coraje cultural y filosófico. No sabemos cuándo sucedió este hecho, pero existen documentos del $^{-}200$ donde esto es evidente: aparece en estos documentos un signo para indicar la ausencia de las cifras, pero dicho signo aún no es una cifra.

Ni siquiera los Griegos, los más grandes matemáticos de la historia, concibieron el cero como número; los números iniciaban a partir de dos, dado que para ellos “el número es multiplicidad”; por tanto, el uno no es un número y tanto menos el cero; no existía ni siquiera la idea de este.

Generalmente se dice que este hecho está relacionado con el terror filosófico que los Griegos tenían de la nada, del vacío, de la ausencia, concepto que entraba en fuerte contraste con la filosofía de Parménides (el Ser, unidad y totalidad, eterno, de donde se puede predicar sólo que "es") que dominó su pensamiento filosófico.



Parménides de Elea [¯V – ¯VI siglo]

Ptolomeo [85 – 165]

Sin embargo un signo redondo aparece en Ptolomeo en el 150 para indicar grados, primos y segundos nulos en las medidas de amplitud.

Pero no nos limitemos, como hacen muchos, sólo al mundo mediterráneo. El cero aparece de modo explícito, sea como glifo sea como símbolo, en la aritmética perfectamente posicional en base veinte de los Mayas, cuya civilización floreció entre el ¯300 y el 900 ocupando un territorio poco más extenso que 300.000 km^2.

Se trata de una civilización estúpidamente ignorada por Europa de los estudios escolares, típicamente europeo -centristas, dado que alcanzó vetas culturales increíbles. Alrededor del 925 los Mayas abandonaron en masa sus territorios por motivos que, si bien existen innumerables hipótesis, son sustancialmente desconocidos; los pocos Mayas que se quedaron debieron sufrir en un primer momento el dominio de los Toltecas (provenientes de México), para después retomar el poder alrededor del siglo XV. Actualmente se cuentan aún 2 millones de Mayas, distribuidos entre México meridional y Guatemala.

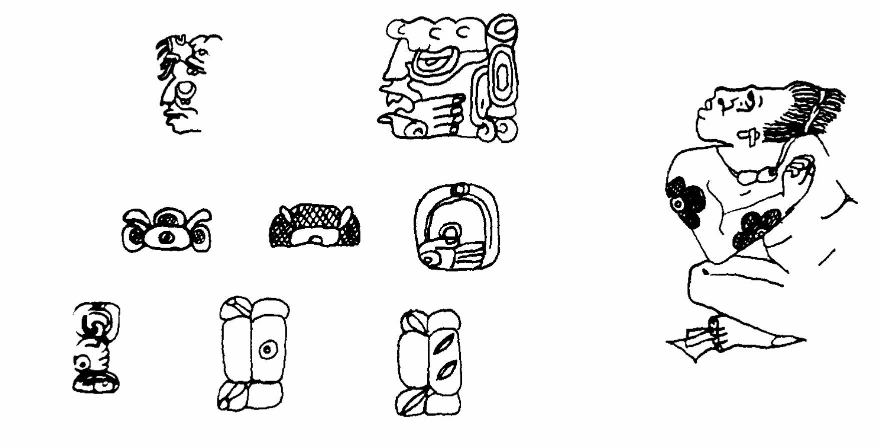
Glifo usual del "kin", día

Glifos cefalomorfes del kin

Glifo cefalomorfo del kin

Glifo antropomorfo del kin

En la "placa de Palenque" aparece este glifo que significa "cero kin", la ausencia del día



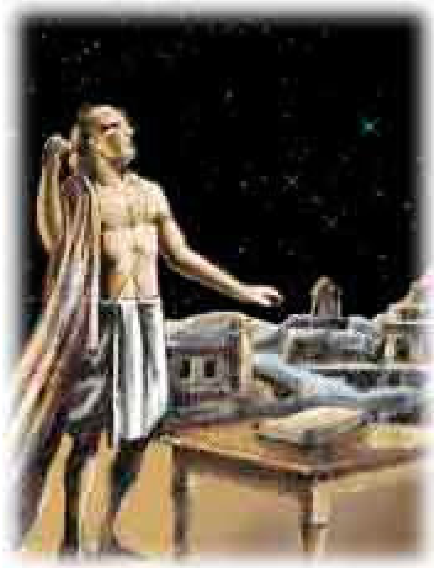
Varios glifos de cero, tomados de estelas y esculturas mayas

Cero, en una de sus diversas versiones en la escritura numeral Maya; a veces llamada "ombligo", más en general "concha"

Como muchos saben, el cero fue concebido en forma madura en India, la tierra de la idea del *nirvana*, el último estado de la perfección a la cual tiende el hombre en las tres grandes religiones hindúes (budismo, giainismo e hinduismo, por cuanto diferenciado en cada uno de estas). Con mayor precisión, el cero aparece como cifra en India con la escritura Gwalior en el siglo VI, confirmado en la escritura sánscrita Devanagari en el siglo VII (después en las diversas escrituras árabes del siglo VIII y IX).

Un primer uso conocido en India de un principio posicional que incluía el cero, se encuentra en el documento Lokavibhaga del 458.

En el 510, en India, el astrónomo Āryabhaţa usaba la palabra sánscrita ‘kha’ en su texto astronómico más famoso, el *Aryabhaţīya*, para indicar el puesto vacío en una escritura posicional de los números naturales. Pero ya se había delineado un uso de kha como un numeral para indicar la cifra cero.



Āryabhaţa [476-550]

Palabras sánscritas que han sido utilizadas durante siglos y con las cuales se hace referencia al cero:

- kha, ambara, ākāśa, antarikşa, pagana, abhra, viyat, nabhas: el cielo, la atmósfera, el espacio;
- śūnya: el vacío;
- bindu: el punto.

En el 629, el matemático y astrónomo Bhāskara escribió, siempre en sánscrito, un importante libro - comentario al *Aryabhaţīya*; en éste calcula la duración del Caturyuga, es decir, el periodo de tiempo necesario para que los nueve elementos del firmamento (Sol, Luna, diversos planetas) se encuentren en alineación perfecta. Se trata de 4.320.000 años. Para escribir este número con palabras y no en cifras, Bhāskara, para los últimos cuatro ceros, escribe precisamente *vacíoespacioatmósferacielo*. [En realidad, estudios de los años ’70 han mostrado que el número no se expresa simplemente con palabras, sino en notación, que hoy llamaríamos polinomial, en un perfecto sistema posicional de base diez] (Ifrah, 1980, páginas 498-499).

Además, entender cero como número lleva inmediatamente a la idea de los números negativos y a la aceptación de sustracciones en las cuales el minuendo es menor que el sustraendo, como 2-5; esto, como consecuencia, implica la total aceptación, con mayor razón, del hecho que 2-2 es un número, un número en todo el sentido de la palabra, sin ninguna duda.

La aritmética de los números negativos está particularmente ligada a la obra del matemático hindú Brahmagupta [598-668]: *Brahmasphutasiddhanta* (literalmente: *El entreabrirse del universo*) del 628.

Brahmagupta intentó igualmente determinar el valor de 0/0, sin mucha fortuna, dado que llegó a afirmar que dicho valor era 0; mientras que dejó abierto el problema de decidir el valor de 1/0.

Sólo en el siglo XII, Bhaskaracharya escribió que nada cambia si a 1/0 se agrega cualquier otro número «porque ninguna cosa puede alterar el infinito e inmutable Dios» (el libro se llama: *Bijaganita*, es decir: *El recuento de las semillas*).

Bhaskaracharya [1114-1185]

Volvamos a Brahmagupta; quien indica el puesto vacío con *śūnya*, pero interpretándolo como el valor de nombre de un número que expresa la nada.

Antes de seguir con la historia, una pequeña digresión lingüística. Nótese cómo el término hindú 'śūnya' ('cero' o 'vacío') se transforma en 'sifr' en árabe y 'zephirum' en latín; mientras que la traducción alterada de 'sifr' se transforma en 'cifra' en latín (junto a otros términos medievales como 'sifra', 'cyfra', 'tzyphra', 'cifre', 'cyfre',… que se encuentran en manuscritos y libros de ábaco).

Aún en el siglo XII, decir de una persona que era una "cifra de angorisma" o una "cifra en algorismos" era despreciativo; sería como decir hoy: "aquella persona vale como un cero en un cálculo".

Más tarde, la palabra latina 'cero' viene interpretada como signo que indica un número cualquiera, es decir, el actual uso de 'cifra' en español. Suerte análoga le tocó al término adoptado a finales de la Edad Media en Francia: 'cifre' se transformó en ‘chifre’ llegando al actual ‘chiffre’; el cambio de significado de ‘cero’ a ‘cifra’ se dio más tarde, dado que textos de finales del siglo XV hablaban de ‘chifre’ en el sentido de ‘cero’. Historia análoga en Alemania, donde ‘sifr’ se transforma en ‘zifra’, ‘ziffra’ y después al moderno ‘Ziffer’ en alemán (notemos que, en alemán, ‘cero’ se dice ‘die Null’). ‘Cifra’, en español, tuvo, más o menos, la misma historia que en italiano. En portugués, ‘cifra’ tiene el mismo significado que en italiano y español, pero en ocasiones se puede aún encontrar en el sentido de ‘cero’. En albanés, ‘cero’ es ‘cero’ y ‘cifra’ es ‘shifra’. En sueco, ‘siffra’ está por ‘sin valor’. En inglés se mantuvo por largo tiempo el término ‘cipher’ por ‘cero’, mientras que para decir ‘cifra’, durante mucho tiempo se usó ‘figure’ o ‘numeral’, antes que ‘digit’.

Pero, volvamos a la historia. En el 950 los Moros en España escribían (uso las cifras actuales): $\dddot{8}\ \dot{3}$ para escribir lo que hoy decimos 8030, y $\dddot{8}\,3$ para escribir 8003.

El monje Gerberto de Aurillac [950 – 1003], que sería después Papa Silvestro II, hábil abaquista, en el 967 usaba fichas de cuerno para hacer cálculos; pero tenía una ficha especial con la cual indicaba el puesto vacío, llamada *sipos* (palabra griega que significa ‘guijarro’).

Gerberto de Aurillac [950 – 1003]

Leonardo Fibonacci el Pisano [1176-1240]

Leonardo hijo de Bonaccio (Fibonacci) el Pisano, en el 1202, habla aún de 9 “cifras” hindúes (*las figura de los hindúes*) y del “signo” cero. Le niega por tanto al cero la dignidad de cifra.

El cero no entra en Europa hasta después que el obispo de París, Étienne Tempier [? – 1279] convocara un concilio con el objetivo de denunciar y revocar puntos de vista de Aristóteles contrarios al cristianismo y que eran aceptados hasta entonces. Su uso era esporádico entre los comerciantes, pero no así en el nivel académico.

Alessandro De Villa Dei alrededor de 1240 (algunos afirman que en 1225) escribe la *Canción del algoritmo* (*Carmen de Algorismo*) leída y releída en los conventos y en las universidades por quienes se ocupasen de *arismetrica*:

> *Prima significat unum; duo vero secunda;*
> *Tertia significat tria; sic procede sinistre*
> *Donec ad extremam venias, quae cifra vocatur*

lo que significa que cero no se consideraba en el primer puesto de la sucesión de los números naturales, sino al puesto décimo, aquella cifra ubicada al último puesto, después del 9.

Tal vez una conciencia definitiva de que el cero debía ser considerado al mismo nivel de cualquier otro número se tuvo en 1484, cuando el médico-matemático Nicolás Chuquet resolviendo la ecuación $3x^2+12=12x$ encuentra $\sqrt{16-16}$, lo que le permite afirmar que tiene sentido calcular $\sqrt{0}$, es decir, trata el cero como cualquier otro número.

Nicolas Chuquet [1445-1488]

El término *cero*, exactamente como lo nominamos hoy, hace su aparición explícita en la obra *Aritmetica Opusculum* de Filippo Calandri (hoja 4, línea 2), estampado en Florencia en 1491, (Código 2669, Biblioteca Riccardiana de Florencia).

Una historia más que bi-milenaria, por tanto, para la aceptación en todo sentido de este número, comodísimo como cifra, difícil como concepción en calidad de número.

Pero cuando un objeto nuevo entra en el lenguaje común y en los hábitos cotidianos, se desencadenan mecanismos nuevos de aceptación semántica que antes o después determinan convenciones de uso que entran a formar parte, precisamente, del lenguaje de todos los días. Por tanto, los niños de hoy no necesitan recorrer el largo camino que recorrió la humanidad y entran en contacto con esta palabra, es decir con este objeto mental, espontánea e ingenuamente, apropiándose de éste sin fatiga.

4. Uso espontáneo del cero en niños entre los 3 y los 6 años

Para demostrar lo afirmado precedentemente, me limito a presentar algunos fragmentos de conversaciones con niños; cada uno de estos fragmentos va precedido de un título que resalta el “tipo” de cero que aparece citado espontáneamente. Naturalmente, de todas las conversaciones a disposición (más de 60), elijo las de mayor significado o que ejemplifican mejor el argumento tratado. Estas conversaciones fueron dirigidas o por mi personalmente o registradas por colabores del NRD de Bolonia en diversas ciudades italianas.

4.1 Cero como cifra y como cardinal

Primera conversación con una niña.

[La niña, M, tiene 4 años y 6 meses].
Se juega a: «Yo digo un número… A ti ¿qué te viene a la mente?.».
(…)
Investigador: Número diez.
M [contentísima, mostrando las manos abiertas]: Los dedos de las manos.
I: Número uno.
M [piensa un poco, después se toca la nariz]: Mi nariz.
(…)
I: Número cero.
M: Los niños que hay aquí. Estoy yo y después cero.
I: ¿Qué significa cero?.

M: Que no hay nada. ¿Ves?. [Muestra las dos manos cerradas a pugno] No hay nada.

I: ¿Tu sabes cómo se escribe el número diez?.
M: Si. Con uno cero y un uno. [Escribe con los dedos en el aire cero y uno].
I: ¿Entonces cero significa nada?.

M: No, cero significa mucho.

I: Pero, ¿cómo?, antes dijiste que cero significaba nada, ahora ¿estás diciendo que significa mucho?.
M: No, no entiendes… Cero significa nada, pero también significa mucho. Se tu me das cero dulces me viene un estómago grande grande.
I: Pero, ¿cómo?, no entiendo. ¿Cómo es posible que cero signifique mucho?.
M: Cuando tu dices diez el cero significa mucho. ¡Si!, ese cero quiere decir mucho.
I: Entonces ¿cien significa mucho mucho?.
M: No se, no se ¿qué significa esa palabra?.
I: Cien es un número que se escribe con un uno y después un cero y después aún otro cero. Entonces ¿es mucho o poco?.
M: Yo no lo sabía. Entonces cien es más grande de diez y el cero quiere decir mucho mucho... pero ¡mucho!.
I: ¿Y mil?.
M: ¿Cómo se escribe?.
I: Con un uno y después cero cero cero. Aquí ¿cómo funciona?.
M: Que el cero quiere decir mucho mucho mucho porque es más más más de diez.

Breve comentario: Aparece evidente la doble naturaleza del cero construido por M, como cifra para "hacer crecer" los números, como cardinal del vacío, de la nada. Las dos concepciones están presentes, distintas y evidentes. M muestra una gran destreza en el manejo de estos dos aspectos, pero lo que emerge con fuerza es la explícita distinción que logra hacer M de estos.

Segunda conversación con la niña.

Algunos días después. La docente que realiza la entrevista y M deciden hablar informalmente, después de haber festejado los once años del hermano y del primo de M quienes nacieron el mismo día.
(…)

Investigadora: Dime ¿cuando uno es tan viejo, pero tan tan tan viejo?, para ti, ¿cuántos años tendría que tener una persona?.
M: Ninguno.
I: ¿Ningún año?. Pero, cuando uno es tan, pero tan viejo, ¿cuantos años debe tener? Cuando el cabello, la barba, es toda blanca …?.
M: ¡Papá Noel!
I: ¿Cuantos años tiene Papá Noel?.
M: Muchos.
I: ¿Cuántos?.
M: Doce.
I: Y si tuviese más de doce años ¿cuántos años podría tener?. Un número más grande de doce...
M: Cien.
I: ¿Y si tuviera aún más? ¿Más de doce, más de cien?.
M: Nada… cien… cero.
I: Cero ¿cuánto es?.
M: Es mucho [acompaña la palabra con un gesto de los brazos, como si quisiera extenderlas fuera de si].
I: ¿Y mucho, cuánto?
M: Muchísimo [nuevamente el mismo gesto con los brazos].
I: Pero si yo te diera cero dulces, ¿cuántos te daría?.
M: Nada.
I: ¿Entonces qué es cero?.
M: Nada.
I: Déjame ver cómo puede ser cero.
M: [Muestra las dos manos cerradas como un puño].
I: Y ¿qué significa cero?.
M: Nada.
(…)
I: ¿Y el número más pequeño de todos?.
M: Uno.
I: ¿Hay un número más pequeño de uno?.
M: No.
I: Tu ¿cuántos hermanos tienes?.
M: Uno.
I: Y ¿cuántas hermanas?.
M: Una.
I: Y ¿cómo se llama?.

M: No tengo.
I: Entonces ¿Cuántas hermanas tienes?.
M: Ninguna.
I: ¿Qué número es “ninguno”?.
M: Cero [de nuevo muestra las manos cerradas].

[De esta entrevista se dispone un video].

Breve comentario: No debe sorprender el hecho de que la entrevistada se contradiga en varias ocasiones; en una ocasión el número mayor es 12 (ciertamente relacionado con el hecho que el hermano, después de los 11 años apenas cumplidos, cumplirá 12, pensado como futura meta lejana), después es 100 y después es 0. Forma parte de la naturaleza de los niños responder con base en motivaciones internas, dando así respuestas no siempre coherentes con la intención de la pregunta del adulto. Las evidentes contradicciones, que podrían ser motivo de crisis si se tratase de un adulto, forman parte de las características de las argumentaciones infantiles. Pero, más allá de esto, M tiene plena conciencia de la doble naturaleza del cero que ha construido, como cifra y como cardinal. Es más, en esta conversación el hecho aparece aún más evidente que en la conversación precedente.

Conversación con un niño.

[Se está hablando de números en grupo; pero ahora se prosigue con una entrevista individual. El investigador entrevista a un niño, B, de 5 años y 3 meses que, en un juego precedente, había declarado que conocía *todos* los números].
I: Entonces, ¿tu conoces todos los números?.
B: Todos todos no lo se, pero sí muchos.
I: Y ¿cuál es el número más grande que conoces?.
(…)
I: Y ¿el más pequeño?.
B: ¡Dos!
I: Ah ¿si?.
B: Si, yo tengo dos hermanos.
I: ¿Todos tus compañeros tienen dos hermanos?.
B: No, mi amigo Simón tiene sólo una hermana.
I: ¿Quien tiene más hermanos, tu o Simón?.
B: Yo tengo mucho más que él.
I: Entonces, ¿Cuál es el número más pequeño de todos?.

B (Pensativo, no responde; después): Ah, pero Catia no tiene hermanos, ella es la que tiene menos.
I: ¿Si? ¿Cuántos hermanos tiene Catia?.
B: ¡Oh!, pero si no tiene, no tiene y ya.
I: Tu tienes dos hermanos, Simón tiene sólo uno, y Catia ¿cuántos tiene?.
B: Beh, cero, ¿no? Catia tiene cero hermanos. Menos de todos.
I: ¿Cuál es, para ti, el número más pequeño de todos?.
B: Quien no tiene hermanos, como Catia, cero.
I: Y ¿sabes escribir todos estos números?.
B: Pues si, te muestro. [Toma el marcador y escribe correctamente en una hoja correctamente 2, después 1, y hace un gran círculo, exclamando:] ¡Este es el más grande di todos!

Breve comentario: B es consciente de que 0 es el menor entre los números naturales que expresan magnitudes; pero también aquí emerge el cero como "grande", pero tal vez haciendo referencia a las dimensiones del signo gráfico.

4.2 Cero como cifra

Entrevista a un niño.

[El niño *M* tiene 5 años y 6 meses].
Investigador: (…) Pero si yo te pido escribirlos, ¿sabes hacerlo?.
M: Cierto, me lo ha enseñado mi mamá
I: ¿De verdad?, veámoslo. Comencemos con trescientos veintiséis.
M [Escribe 30026; declarando]: Este es un tres, este es cero, este es cero y este es veintiséis. [Muestra el resultado satisfecho, girando la hoja a fin que el investigador lo pueda ver].
I: ¿Y sabes escribir también trescientos?.
M: Si, es muy fácil. [Escribe correctamente 300, después gira la hoja].
I: Pero, ¿es más grande trescientos veintiséis o trescientos?.
M: Trescientos veintiséis, ¿no? [E indica la extensión de la escritura].
I: ¿Y si yo te pido escribir un número grande grande grande?.
M: ¿Cómo las estrellas del cielo?.
I: Si, o aún más grande.
M: Escribo entonces un tres, con muchos muchos números después. [Escribe un tres seguido de tres tres y después hace un garabato hacia la derecha, como indicando que su número continua].
I: ¿Y lo puedo escribir sólo con un tres seguido de muchos muchos ceros?.

M: Pues si, como en el dinero, un tres y después cero cero cero [y con la mano derecha insinúa escribir ceros en el aire].
I: Si yo escribo trescientos [lo escribe en la hoja], tu ¿cómo lo lees?.
M [lo observa y con seguridad, alzando una mano]: Trescientos, ¿no?.
I: Y ¿si escribo tres mil? [Lo escribe en una hoja].
M: Tres mil, ¿no? Y si escribes otros ceros, es mucho más.

Breve comentario: Total conciencia del cero como cifra, antes del ingreso a la escuela primaria. La escritura 30026 como trescientos veintiséis no debe asombrar; esta forma de escribir ha sido ampliamente testimoniada por la literatura de investigación; es el primer paso espontáneo hacia la escritura posicional. No se debe considerar como "error" sino como un pasaje necesario hacia una escritura evolucionada formal adulta: la dicción oral "trescientos - veintiséis" es interpretada y transcrita literalmente, pasando del registro semiotico lengua natural al registro semiotico escritura formal hindú - árabe de los numerales.

Entrevista a otro niño.

[El niño S tiene 3 años y 10 meses]
(…)
Investigador: ¿Cuál es para ti el [número] más pequeño?.
S: No lo se… Yo tenía un trenecito, pero ahora mi mamá lo ha regalado a Carla.
I: Ah, ¿Cuántos vagones tenía tu trenecito?.
(…)
I: Pero, ¿prefieres tener tres o cinco chocolatinas?.
S: Pues cinco, ¿no? Cinco son así [y, correctamente, muestra la mano abierta].
I: Pero entonces ¿es más pequeño tres o cinco?.
S: Ah, tres, tres chocolatinas, se las doy a otro, pero cinco las dejo todas para mi. Te lo había dicho ¿no?.
I: Entonces, tres es menor que cinco.
S: Pues, sí. [Hace un gesto, extendiendo los brazos como diciendo: Es natural].
I: Entonces, ¿cuál es el más pequeño de todos?.
S: Pues, tres es mas pequeño que cinco. Pero el más pequeño de todos es cuando tienes sólo una chocolatina, eso si que es poco, es lo de menos, menos es imposible.
I: ¿Seguro?. Y si tu te comes la última chocolatina, ¿cuántas te quedan?.
S: ¡Beh!, si me como la última después me quedan cero, cero chocolatinas, no hay más, si me como la última. Pero después compramos otras.

Breve comentario: S. tiene menos de 4 años, pero ya ha conceptualizado cero como cardinal del conjunto vacío; lo trata como un número, con el mismo criterio de los otros. Divaga en la narración, se pierde un poco al contar ("obliga" la mano abierta a tener tantos dedos como números citados), pero posee cero como cardinal. Su argumentación en más de una ocasión parece dirigirlo en direcciones diversas pero siempre rectifica, lo cual es indicio de que ha adquirido una cierta conciencia.

Una entrevista iluminadora

El Investigador entrevistó a un niño, *M*, de 5 años y 7 meses, partiendo de muy lejos y logrando que le hablara de lo que más le interesaba en aquel momento, una colección de reproducciones de tractores, muy común entre los niños de esta sección y de aquel pueblo.

(…)

Investigador: ¿Y el más pequeño de todos?.

M: ¡Cero!

I: ¿Y más pequeño de cero?.

M: Nada.

I: ¿Que significa cero?.

M: Cero. Nada. Pero yo sé cuanto es seis más seis. Estos aquí los se todos.

I: Seis más seis, ¿cuánto es?.

M: Seis más seis es doce.

I: ¿Y seis más uno?.

M: Sesenta y uno. Te digo los que son más fáciles. Aquellos facilísimos me los se todos. (...) Cinco más cero, ¡cinco!.

I: ¿Por qué cinco más cero da cinco?.

M: Me lo dijo Victoria.

I: Y entonces, ¿seis más cero?.

M: Seis.

I: Y ¿siete más cero?.

M: Siete.

(…)

I: ¿Me dices cómo es cero?.

M: Es como una "o".

I: ¿Es grande o pequeño?.

M: Es medio.

I: ¿Me dejas verlo?.

M: Lo dibujo. [Con el dedo índice hace un diseño sobre la mesa donde se reconoce el objeto cero, después pide una hoja y un lápiz para escribir; realiza un círculo "oblongo", un cero escrito lo bastante grande como para llenar la hoja].
I. Pero cero no vale nada. [Hace un gesto de negación con la cabeza]. ¿Y ahora qué dices?, ¿en el diez está el cero?.
M: Sí.
I: Entonces ¿vale o no vale el cero?.
M: Está en el diez, en el cien, en todos estos números de aquí.
I: Pero, ¿vale o no en estos números?.
M: Sí, pero cuando va antes no vale.
I: Y cuándo está después ¿vale?.
M: Sí.
I: ¿Cuánto vale cuando está después?.
M: Diez… cien… y así.
(…)
I: Tu tienes una hermanita pequeña y es posible que ella no sepa todas las cosas que tu sabes, y tal vez no lo sabe porque es pequeña. ¿Cómo le explicarías a ella como funciona el cero?.
M: Yo le digo que no vale nada, pero que después si vale.
I: ¿Por qué dices que "después vale"?.
M: Que en diez, cien, ciento uno, ciento dos, ... y en todos los otros siempre hay un cero.
[M toma en la mano un lápiz, lo examina con atención; da la idea de no querer continuar; pero después]
M: Dime más cosas de éstos.
I: Si yo te pido que cuentes, ¿por donde comienzas?.
M: De uno.
I: ¿Y cero? ¿Es un número o no es un número?.
M: Cuando inicia no.
I: Entonces, cuando se inicia a contar no se dice cero. Y ¿cuándo se dice cero?.
M: Yo tengo un computador pequeño ... que no tiene el cero. Tiene sólo diez. ¿Me dejas ver si el tuyo lo tiene?.
I: En el mío están todos los números.
M: ¿Tiene cero, uno, dos, tres, …,?.
I: Sí. Pero, si inicio a contar y digo cero, uno, dos, … ¿me estoy equivocando?. [Afirma con la cabeza esbozando una sonrisa con picardía]. ¿Cómo se debe contar?.
M: Uno, dos, tres, …, así.

[Abre los dedos de las manos para ayudarse, después se frota una mano contra la otra intentando quitar una mancha sin lograrlo. Después mira al investigador directamente, como pidiéndole continuar].
I: Tu papá, tu mamá, …, ¿te han contado que a veces aquí en invierno hace mucho frío? Este año no hizo mucho frío, pero cuando eras pequeño hubo un invierno muy frío y la temperatura estuvo bajo cero.
M: ¿Como en Rusia?.
I: Sí, como en Rusia. ¿Qué significará que la temperatura está bajo cero?.
M: Que baja uno, dos, tres, … , todos estos números.
I: Bajo cero, ¿me lo puedes mostrar? [Escribe 0, 1, 2, 3 ,4, 5] Y ¿cómo se sabe que estos están bajo cero?.
M: Porque… Un millón se escribe así [escribe un uno con algunos ceros a la derecha].
I: ¿Los números bajo cero son más grandes o más pequeños que cero?.
M: Más grandes. Porque está uno y después está cien, diez, nueve, ocho.
I: Cuando la temperatura desciende bajo cero se dice que es menos uno.
M: ¡De verdad! Menos uno, menos dos, menos tres, menos cuatro, … Menos uno una vez estaba en el termostato de Pescetelli [es el propietario de la fábrica de queso del lugar, personaje muy bien conocido por todos].
I: ¿Y lo viste?.
M: Sí.
I: ¿Qué dices, era frío o caliente?.
M: Era frío.
I: Ese número significa que era ¿más o menos de cero?.
M: Más.
[Una ulterior breve distracción y de nuevo volvemos al coloquio].
I: Cuando dices uno, ¿en que piensas?.
M: A una sola cosa y ya, una cosa sola.
I: ¿Por ejemplo?.
M: Yo y nada más, sólo yo; una casa sola.
I: ¿Dos?
M: Dos. Dos casas solas. Tres, tres casas solas. Cuatro, cuatro casas solas…
I: ¿Y cero?.
M: Ninguna casa.
(…)

Breve comentario: *M* demuestra un dominio total del cero, sea como cardinal del conjunto vacío sea como cifra; demuestra un dominio no pleno de la escritura de números grandes y de la gestión de éstos aunque sólo de forma oral; demuestra conocimiento de los números negativos; pero no acepta que éstos puedan ser inferiores a cero, dado que su conceptualización lo lleva a privilegiar el cero como cardinal y no como ordinal, hecho que se evidencia de forma clara. Aquí con mayor contundencia que en otras circunstancias se tiene conciencia de cómo este concepto ha sido muy bien construido.

Entrevistas colectivas

Se realizaron también entrevistas a pequeños grupos de niños con el fin de verificar no sólo los conocimientos sobre este tema, sino también con la intención de analizar las interacciones verbales recíprocas.
El investigador, precedentemente, había propuesto algunas experiencias de juego con los niños quienes, en un segundo momento, serían entrevistados.
(De todas estas entrevistas tenemos a nuestra disposición la filmación en video).

Primera entrevista colectiva a A [niño de 5 años], M [niña de 4 años y 6 meses], Rf [niño de 5 años y 9 meses]

I: Para ti ¿qué es el cero?.
A: Nada.
M: Es un número que no vale nada.
Rf: Si pones primero el cero y con el número queda sólo el número y si pones un número y después el cero, sí, hace un número.
I: ¿Qué quiere decir cero?.
A: Nada, no vale nada.
Rf: Sólo si pones un número, después el cero va detrás y se forma un número.
I: ¿Qué número conoces con cero?.
A: Veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa, cien y diez.
I: ¿Y sabes cómo se escribe cien?.
Rf: Si: uno cero cero.
(Un momento de distracción).
A: Yo también sé escribir un millón. Uno y diez ceros.
I: Entonces, ¿el cero sirve para algo?.
Rf: Si pones un número detrás, él se forma con el 5 o 4 o 2 o 1 o 6; se forma todo con el cero.
I: ¿Y si te digo: te doy cero dulces?.
Rf: ¿Cero dulces? Y no me das nada, porque si pones un dulce me como uno.

Breve comentario: Rf, el mayor de los tres niños entrevistados, domina la escena dado que demuestra un mejor manejo del argumento. Los otros, más pequeños, se dejan llevar, hacen ademanes de afirmación, parecen aceptar conscientemente la posición de Rf. Muy interesante la forma de compartir el conocimiento y el hecho, evidente mas no documentado aquí, de la negociación de significados entre los tres entrevistados. En esta entrevista, ciertamente, A y M han construido conocimiento o lo han consolidado.

Segunda entrevista colectiva a B [niña de 5 años y 6 meses], S [niño de 5 años y 6 mese]), Rf [el mismo niño de la entrevista anterior, de, 5 años y 9 meses]

(…)

I: ¿Qué quiere decir cero?.

B: Cero es un número.

S: Es redondo como la O, como tus gafas.

I: ¿Si te digo: te doy cero dulces…?.

B y S al unísono: Nada, nada.

I: ¿Pero se ti digo: te doy uno-cero dulces?.

B: Diez dulces.

I: Entonces: ¿tu prefieres uno-cero dulces o uno-cero-cero dulces?.

B: ¡Uno-cero-cero dulces!

Tercera entrevista colectiva a L [niña de 5 años y 9 meses], G [niño de 6 años y 1 mes]

(…)

I: Entonces ¿el cero sirve para algo?.

L: Sirve para escribir los números, por ejemplo diez es con el cero, delante uno y detrás cero.

I: Entonces, ¿qué quiere decir cero?.

G: Es como una O, pero es un número.

I: Y ustedes ¿usan el número cero?.

G: El número cero usamos una vez cuando hicimos un dulce, al final de un número, ciento cincuenta, está el cero.

Breve comentario: Aparece sea la idea de cero como cardinal del conjunto vacío, sea como cifra para escribir particulares números.

Último testimonio

Como último testimonio, presento una parte de una conversación entre niños de primero de primaria [D (niño), Ma (niña), Mr (niña), Mc (niña), Gi (niña), Gr (niña), todos entre los 6 años y 2 meses y los 6 años y 6 meses]; se está simulando una actividad de compraventa en una floristería y en una panadería.
Gi ha escrito en una hoja el precio de un determinado producto: 0,50, afirmando que se trataba de 50 céntimos.
(…)
D: El primero cero vale, el segundo no.
Mc: Pero come no vale el cincuenta, disculpa.
D: Vale sólo el cero.
Mc: En cambio los cincuenta valen.
Gi: Cero no se cuenta.
Gr: Cero es nada.
Mc: No existe la moneda de cero euro, cero dinero quiere decir que es gratis.
Pausa, después:
Mc: Estaría escrito sólo 50 con E de euro.
Mr: No es una E.
Mc: Sí, es una E de euro.
…
I (tiene en mano dos monedas, una da 1€ y una de 0,50€): ¿Cuál tiene más valor?.
En coro: Un euro.
Ma: Un euro es una decena.
I: ¿De qué?.
Ma: De estos… (Se bloquea).
I: ¿De diez céntimos?.
Ma: Si, y esta de cincuenta céntimos es cinco.
Gi: Porque está el cinco.
Gr: Está el cero y el cero no vale nada.
Mr: Pero también en el diez está el cero.
Ma: Esta de aquí [indica la moneda de 1€] vale una decena que es diez, esta vale cinco céntimos [indicando la moneda de 0,05€].
D: ¡Porque los céntimos son pocos y los euros son tantos!

Breve comentario: Notable la espontánea negociación de significados entre los niños para dar sentido a dos diversas necesidades de cero en la escritura 0,50; aún dentro del aparente desorden, si se siguen los razonamientos, se ve cómo para cada uno de ellos aparece diversamente evidente el hecho de que el primer cero de

0,50 indica ausencia mientras que el segundo indica un puesto que se debe ocupar para distinguir las décimas (de las centésimas) de las unidades. La actividad de compraventa continúa y la escritura 0,50€ fue aceptada y compartida por todos como 50 céntimos o medio euro («Se necesitan 2 monedas de 0,50 para tener 1€»). Esta distinción entre escrituras diversas del cero es ciertamente sofisticada pero emergió claramente de una exigencia de organizar el proceso de compraventa, por tanto de una exigencia esencial, no de una propuesta lejana de contextos concretos.

Una nota: No todos los niños entrevistados saben escribir los numerales del 1 al 9, pero casi todos saben escribir cero, como mínimo saben que cero se representa con "una O". Sin embargo,en la representación, es total el uso de la forma oblonga correcta 0 y de hecho no es generalizada la forma redonda con forma de circunferencia ○.

La mayor parte de los niños sabe asociar el cero con "nada", entendido como ausencia de acción o de objetos («No se hace nada, cero»; «Cero patos»; «Cero dinero»; ...). Es interesante, a este propósito, la expresión de un niño que, jugando a hacer adiciones, al momento de dar la respuesta a 5+0 dice 5 y muestra una mano con los dedos extendido y la otra mano con los dedos cerrados para indicar cero (todas estas referencias se encuentran explícitamente en los videos a nuestra disposición).

Casi todos los niños consideran el cero como un número.

Muchos, haciendo referencia a la escritura de los números dicen que cero sirve para escribir los números.

La casi totalidad de los entrevistados reconocen el cero en un número escrito y demuestra que saben escribir los números con el cero; casi todos manifestaron, aunque intuitivamente, el valor posicional del cero en la escritura de los números.

Un número considerable de niños demuestra tener plena conciencia de sus propias capacidades («Yo sé cómo se hace»; «Yo sé cómo se escribe»; ...).

5. Cero, ¿obstáculo didáctico creado a partir de malentendidos?

Que el cero constituye un obstáculo epistemológico es un hecho en el cual todos están de acuerdo: es suficiente estudiar su controvertida, difícil, larga y tormentosa historia.

Pero el hecho de considerarlo un concepto peliagudo, incluso de no poder ser construido por niños pequeños, lleva a los maestros a reenviar su introducción hasta cuando el uso espontáneo es anulado por la introducción de otros conceptos y de otros mecanismos, transformando por tanto este objeto matemático en un verdadero obstáculo didáctico.

Existen tantos objetos matemáticos que constituyen obstáculos epistemológicos, pero no por eso estos objetos vienen eludidos o no entran a formar parte de los conocimientos que conforman la cultura de un niño sin importar la edad.

Paradójicamente, es más, precisamente por este motivo, ciertos objetos que son un obstáculo epistemológico se introducen pronto, de forma tal que se pueda disponer del tiempo necesario para construirlos con éxito, plasmándolos uno a la vez, con plena conciencia.

El caso del cero es singular: es un obstáculo epistemológico pero, como lo habíamos visto y como es fácilmente verificable, está ya presente, en forma ingenua, pero en líneas generales aceptable, en niños muy pequeños.

Sin embargo, una interpretación desmañada del concepto de dificultad epistemológica lleva a sofocar conocimientos ingenuos no formales, que en mi opinión por el contrario constituyen la base de todo aprendizaje significativo, reprimiendo un desarrollo espontáneo que llevaría rápidamente al éxito. Se sofoca en nombre de las dificultades que sólo el adulto piensa ver, basadas como están en ausencia de pruebas empíricas. Cuando se han formado otros conceptos, que entran en contraste con dicho concepto, se representa en forma diversa, demasiado formal, poco espontánea, creando precisamente obstáculos didácticos y haciendo, ahora sí, difícil dicho objeto. Lo que confirma la convicción adulta de su dificultad que, por si misma no existiría.

La propuesta es: dejemos expresar en forma espontánea, informal, ingenua todo concepto matemático que el niño tiene desde pequeño, sin bloquearlo, es más, aprovechando sus competencias ingenuas, informales; y procedamos así, con mucha propiedad didáctica, haciendo de modo que imágenes mentales sucesivas de cero se organicen hasta convertirse en modelos estables correctos en el momento oportuno, cuando el concepto de cero se haya organizado en la mente y coincida con el resultado cognitivo esperado.

Al contrario de lo que afirman los apocalípticos: antes se comience mejor es, pero sin construcciones formales e innaturales que, entre otras cosas, son inútiles al inicio.

La investigación, ésta, por ejemplo, muestra que es posible y tal vez necesario.

Agradecimientos: Agradezco a todos los colaboradores que participaron en estas entrevistas y en particular forma Lucia Baldazzi, Inés Marazzani y Aurelia Martini. Los videos y los protocolos completos de las entrevistas están a disposición de quien lo solicite. Agradezco igualmente los árbitros por las observaciones hechas a precedentes versiones del artículo, lo que me llevó a revisarlo y a proponerlo en la actual versión.

Bibliografía

[1] Crump T. (1990). *The Anthropology of Numbers*. New York: Cambridge University Press.

[2] D'Amore B., Matteuzzi M.L.M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venecia: Marsilio.

[3] D'Amore B., Oliva P. (1994). *Numeri. Teoria, storia, curiosità, giochi e didattica nel mondo dei numeri*. Milán: Angeli.

[4] Ifrah G. (1981). *Histoire universelle des chiffres*. Paris: Seghers.

[5] Kaplan R. (1999). *Cero. Storia di una cifra*. Milán: Rizzoli.

[6] Piattelli Palmarini M (editor.) (1980). *Language and Learning*. Londres: Routledge & Kegan Paul.

[7] Seife C. (2000). *Cero . The Biography of a Dangerous Idea*. New York: Viking Penguin.

Nota: Para la terminología didáctica usada y no explicada por brevedad:
D'Amore B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio.

Aplicación del método de los coeficientes indeterminados discreto al cálculo de algunas sumas parciales notables

G. Calbo Sanjuán
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols, L'Alcúdia, Valencia

Resumen

This paper deals with the application of the discrete undetermined coefficient method to calculate some distinctive partial sums appearing in a standard primer of Calculus.

Introducción

Un problema clásico del Análisis Matemático es el cálculo de sumas parciales tales como la suma de los n primeros naturales:

$$1 + 2 + \cdots + n, \quad n \geq 1 \text{ entero}, \tag{1}$$

la suma de los cuadrados de los n primeros naturales:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2, \quad n \geq 1 \text{ entero}, \tag{2}$$

la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r y semilla 1:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}, \quad n \geq 1 \text{ entero}, \tag{3}$$

o la suma trigonométrica de los senos cuyos argumentos están en progresión aritmética de diferencia y semilla ω:

$$\sin(\omega) + \sin(2\omega) + \cdots + \sin(n\omega), \quad n \geq 1 \text{ entero}, \ \omega \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Sin embargo, los métodos analítico-algebraicos de deducción de estas sumas son muy variados y aparentemente no gozan de ninguna estructura común: para el cálculo de

(1) y (3) es bien conocido que existen numerosos métodos, así por ejemplo, entre las formas conocidas para obtener (1) destaca quizás la generalización de la genial idea del joven Gauss para sumar los 100 primeros naturales, véase [1, pág. 627]; para (2) puede verse [2, págs. 4-9], la cual se basa en una hábil manipulación del término general de la suma considerada y en [3, pág. 328] puede verse una vía estándar para deducir el valor de (4). Incluso vale la pena destacar que existen otros métodos preciosos, denominados *figurativos* o geométricos, para *deducir* el valor de algunas de estas sumas, véase [4, págs. 69-111], [5] y [6, cap. 1].

El objetivo de este artículo es dotar de un tratamiento unificado al problema del cálculo de ciertas familias de sumas (que incluyen como casos particulares a las dadas en (1)-(4)), lo cual posibilita en la práctica docente, mostrar desde un marco teórico común la resolución de este tipo de problemas, facilitando con ello el proceso de aprendizaje.

El contexto teórico dentro del cual se abordará el cálculo de ciertas sumas parciales (las cuales serán especificadas en los sucesivos apartados) es el de las ecuaciones en diferencias (e.e.d.) de primer orden lineales completas con coeficiente de difusión unitario y condición inicial nula, formuladas a través del problema de valor inicial (p.v.i.):

$$\left.\begin{array}{lcl} x(n+1) & = & x(n)+b(n), \quad n \geq 0, \\ x(0) & = & 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Ello es debido a que para calcular la suma parcial, digamos $S(n)=\sum_{k=1}^{n} t(k)$, podemos proceder como sigue para plantear una e.e.d. del tipo (5):

$$S(n+1)=S(n)+t(n+1), \quad n \geq 0, \tag{6}$$

siendo $t(n)$ el término general de la suma parcial, el cual obviamente se supondrá conocido de forma explícita. Además, si no se suma ningún término se tiene claramente que $S(0)=0$. Por tanto, basta realizar la identifiación: $x(n)=S(n)$ y $b(n)=t(n+1)$ para poder tratar el problema así planteado como un caso particular de (5). Para este p.v.i. es bien sabido, (véase [7, cap. 2]), que la solución puede escribirse en la forma

$$x(n)=C+x^{pc}(n), \quad C \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

donde $x^{pc}(n)$ es una solución particular de la e.e.d. completa y C es una constante que se calcula imponiendo la c.i. $x(0)=0$, por lo que $C=-x^{pc}(0)$. Resumiendo, la solución de (5) es de la forma

$$x(n)=x^{pc}(n)-x^{pc}(0), \tag{8}$$

siendo $x^{pc}(n)$ una solución particular de la e.e.d. completa $x(n+1) = x(n) + b(n)$, la cual, en general, puede obtenerse utilizando el método de variación de constantes (véase [7, pág. 103]), aunque en la práctica también es de gran utilidad el método de los coeficientes indeterminados que el cual es especialmente adecuado para cuando el término independiente $b(n)$ en (5) tiene una forma funcional tipo polinómica, exponencial, trigonométrica o bien, suma o producto de algunas de estas formas (véase [7, págs. 103-107]). En este trabajo se aplicará el método de los coeficientes indeterminados discreto para calcular algunas sumas parciales notables como las anteriormente introducidas, mostrando que este enfoque permite dotar la resolución de este tipo de problemas de un marco teórico común.

1 Progresiones aritméticas

Aunque se trata de un problema muy sencillo, desde el punto de vista pedagógico es adecuado empezar aplicando esta técnica al cálculo de la suma $A(n)$ de los n primeros términos de una progresión aritmética de semilla $a(1) \in \mathbb{R}$ y diferencia $d \in \mathbb{R}$, cuya recurrencia es $a(n+1) = a(n) + d$ y cuyo término general está dado por: $a(n) = a(1) + (n-1)d$, siendo $n \geq 1$ entero. Claramente $A(n)$ satisface la recurrencia dada en (5), donde $x(n) = A(n)$ y $b(n) = a(1) + nd$. Para la búsqueda de $x^{pc}(n) = A^{pc}(n)$, utilizando el método de los coeficientes indeterminados debemos ensayar soluciones de la forma $A^{pc}(n) = n\,(B_0 + B_1 n)$, (obsérvese que esto nos asegura que la constante C es nula: $C = -A^{pc}(0) = 0$), siendo B_0 y B_1 coeficientes que están por determinar, para lo cual basta exigir que $A^{pc}(n)$ satisfaga la e.e.d. (5), de donde obtenemos:

$$(n+1)\,(B_0 + B_1(n+1)) = n\,(B_0 + B_1 n) + a(1) + nd, \tag{9}$$

comparando coeficientes del mismo exponente en n^i con $i = 0, 1, 2$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{rcccc} n^0 & : & B_0 + B_1 & = & a(1) \\ n^1 & : & B_0 + 2B_1 & = & B_0 + d \\ n^2 & : & B_1 & = & B_1 \end{array}\right\} \tag{10}$$

de donde resolviendo este sistema de ecuaciones lineales obtenemos $B_0 = a(1) - d/2$ y $B_1 = d/2$. Por tanto, sustituyendo los cálculos anteriores en la expresión de $A(n)$ y considerando el término general $a(n)$, se tiene la fórmula buscada:

$$A(n) = n\left(a(1) - \frac{d}{2} + \frac{d}{2}n\right) = n\frac{a(1) + a(n)}{2}, \tag{11}$$

la cual es bien conocida.

2 Progresiones geométricas

Apliquemos la técnica anterior al cálculo de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de semilla $g(1)$ y razón $r \in \mathbb{R} - \{1\}$ (el caso en que $r = 1$, es un problema trivial). En este caso la recurrencia está dada por $g(n+1) = g(n)r$ y el término general por $g(n) = g(1)r^{n-1}$. Se desea calcular una fórmula para la suma

$$G(n) = \sum_{k=1}^{n} g(1)r^{k-1},$$

la cual satisface el p.v.i. (5) con $x(n) = G(n)$ y $b(n) = g(1)r^n$. La aplicación del método de los coeficientes indeterminados sugiere el ensayo de soluciones particulares de la e.e.d. completa en la forma $G^{pc}(n) = B_0\rho^n$, lo que conduce a la igualdad:

$$B_0\rho^{n+1} = B_0\rho^n + g(1)r^n, \tag{12}$$

y comparando ambos miembros, se obtiene el sistema no lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} B_0(\rho - 1) & = & g(1) \\ \rho & = & r \end{array}\right\} \tag{13}$$

cuya solución es $\rho = r$ y $B_0 = g(1)/(r-1)$, luego $G^{pc}(n) = g(1)r^n/(r-1)$, y $C = -G^{pc}(0) = -g(1)/(r-1)$. Por tanto la fórmula búscada es

$$G(n) = -\frac{g(1)}{r-1} + \frac{g(1)r^n}{r-1} = \frac{g(1) - g(1)r^n}{1-r}, \tag{14}$$

como es bien sabido.

3 Progresiones aritmético-geométricas

Como un caso híbrido de los dos anteriores, podemos considerar las denominadas progresiones aritmético-geométricas cuyo término general está dado por $h(n) = (h(1) + (n-1)d)r^{n-1}$. Aunque en lo que sigue supondremos $r \neq 1$, obsérvese que en caso contrario se obtiene como caso particular las progresiones aritméticas y cuando $d = 0$, las progresiones geométricas. El cálculo habitual de una fórmula cerrada de la suma de los n primeros términos de esta serie, es decir, de

$$H(n) = h(1) + (h(1)+d)r + (h(1)+2d)r^2 + \cdots + (h(1)+(n-1)d)r^{n-1},$$

requiere de una manipulación acertada y no extrapolable a otros escenarios como los tratados en el resto de las secciones de este trabajo, véase [8, pág. 309], sin embargo el enfoque adoptado en este trabajo es válido para calcular esta suma. Identificando la notación con (5), ahora $x(n) = H(n)$ y $b(n) = (h(1) + nd)r^n$. Para determinar una solución particular $H^{pc}(n)$ de la e.e.d. completa subyacente, ensayamos con sucesiones de la forma $H^{pc}(n) = (B_0 + B_1 n)\, r^n$ y obtenemos

$$(B_0 + B_1(n+1))\, r^{n+1} = (B_0 + B_1 n)\, r^n + (h(1) + nd)r^n,$$

es decir,

$$(B_0 r + B_1 rn + B_1 r)\, r^n = (B_0 + B_1 n + h(1) + nd)\, r^n,$$

y simplificando r^n y comparando coeficientes de n^i para $i = 0, 1$, se llega al sistema de ecuaciones no lineal

$$\left.\begin{array}{cccc} n^0 & : & B_0 r + B_1 r & = & B_0 + h(1) \\ n^1 & : & B_1 r & = & B_1 + d \end{array}\right\} \tag{15}$$

cuya solución es

$$B_0 = -\frac{dr + (1-r)h(1)}{(1-r)^2} \quad , \quad B_1 = -\frac{d}{1-r},$$

luego

$$H^{pc}(n) = -\left(\frac{dr + (1-r)h(1)}{(1-r)^2} + \frac{dn}{1-r}\right) r^n,$$

y por tanto

$$C = -H^{pc}(0) = \frac{dr + (1-r)h(1)}{(1-r)^2},$$

lo que nos indica que la fórmula buscada es

$$H(n) = -\left(\frac{dr + (1-r)h(1)}{(1-r)^2} + \frac{dn}{1-r}\right) r^n + \frac{dr + (1-r)h(1)}{(1-r)^2},$$

lo cual se puede expresar equivalentemente como

$$H(n) = \frac{h(1) - (h(1) + nd)\, r^n}{1-r} + \frac{dr\,(1-r^n)}{(1-r)^2}, \quad r \neq 1,$$

que es la forma habitual de presentarla, véase [9, pág. 1].

4 Suma de los cuadrados de los n primeros naturales

El cálculo de la suma $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ también puede abordarse por esta misma técnica. Basta observar que en (5), ahora $x(n) = S_2(n)$ y $b(n) = (n+1)^2$. Ahora buscaremos la solución particular de la e.e.d. completa en la forma $S_2^{pc}(n) = n\left(B_0 + B_1 n + B_2 n^2\right)$. Razonando como en los casos anteriores ahora llegamos al sistema lineal

$$\left.\begin{array}{lccc} n^0 & : & B_0 + B_1 + B_2 & = & 1 \\ n^1 & : & B_0 + 2B_1 + 3B_2 & = & B_0 + 2 \\ n^2 & : & B_1 + 3B_2 & = & B_1 + 1 \\ n^3 & : & B_2 & = & B_2 \end{array}\right\} \tag{16}$$

cuyas soluciones son: $B_0 = 1/6$, $B_1 = 1/2$ y $B_2 = 1/3$. Obsérvese que por ser $S_2^{pc}(n)$ un polinomio sin término independiente, $C = 0$ y por tanto sustituyendo los cálculos anteriores en la expresión de $S_2(n)$ se obtiene

$$S_2(n) = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{17}$$

5 Suma de los cubos de los n primeros naturales

Otras de las sumas notables que suelen introducirse en un primer curso de Cálculo es $S_3(n) = 1^3+2^3+\cdots+n^3$. La solución particular de la e.e.d. completa la buscamos en la forma $S_3^{pc}(n) = n\left(B_0 + B_1 n + B_2 n^2 + B_3 n^3\right)$. Ahora llegamos al sistema lineal

$$\left.\begin{array}{lcccc} n^0 & : & B_0 + B_1 + B_2 + B_3 & = & 1 \\ n^1 & : & B_0 + 2B_1 + 3B_2 + 4B_3 & = & B_0 + 3 \\ n^2 & : & B_1 + 3B_2 + 6B_3 & = & B_1 + 3 \\ n^3 & : & B_2 + 4B_3 & = & B_2 + 1 \\ n^4 & : & B_3 & = & B_3 \end{array}\right\} \tag{18}$$

cuyas soluciones son: $B_0 = 0$, $B_1 = 1/4$, $B_2 = 1/2$ y $B_3 = 1/4$. De nuevo, por el mismo motivo que el subrayado para el cálculo de $S_2^{pc}(n)$, la constante $C = 0$ y se obtiene

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(S_1(n)\right)^2. \tag{19}$$

Del mismo modo en que hemos procedido para calcular $S_2(n)$ y $S_3(n)$, puede generalizarse el método para evaluar el caso general $S_p(n)$, siendo p un entero positivo.

6 Suma de los senos con argumentos en progresión aritmética

Sin pretender agotar las numerosas sumas notables que pueden obtenerse, de una forma distinta a la habitual, mediante este método, acabaremos el trabajo calculando la siguiente suma $S_\omega(n) = \sin(\omega)+\sin(2\omega)+\cdots+\sin(n\omega)$, donde $\omega \in \mathbb{R}-\{2k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$. En este caso tomamos en (5) $x(n) = S_\omega(n)$ y $b(n) = \sin((n+1)\omega)$. La técnica de los coeficientes indeterminados sugiere la búsqueda de la solución particular en la forma $S_\omega^{pc}(n) = A_0 \cos(n\omega) + B_0 \sin(n\omega)$. Exijamos que $S_\omega^{pc}(n)$ sea solución de la e.e.d.:

$$A_0 \cos((n+1)\omega)+B_0 \sin((n+1)\omega) = A_0 \cos(n\omega)+B_0 \sin(n\omega)+\sin((n+1)\omega), \quad (20)$$

ahora desarrollando los términos $\cos((n+1)\omega)$ y $\sin((n+1)\omega)$ por las fórmulas de adición correspondientes e igualando los coeficientes de $\cos(n\omega)$ y de $\sin(n\omega)$ en ambos miembros de (20), se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{lcrcl} \cos(n\omega) & : & (-1+\cos(\omega))A_0 + B_0\sin(\omega) & = & \sin(\omega) \\ \sin(n\omega) & : & -A_0\sin(\omega) + (-1+\cos(\omega))B_0 & = & \cos(\omega) \end{array}\right\} \quad (21)$$

el cual es un sistema de Cramer, ya que, como $\omega \in \mathbb{R} - \{2k\pi\}$ se tiene

$$\begin{vmatrix} -1+\cos(\omega) & \sin(\omega) \\ -\sin(\omega) & -1+\cos(\omega) \end{vmatrix} = 2(1-\cos(\omega)) \neq 0,$$

y por tanto aplicando la regla de Cramer

$$A_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sin(\omega) & \sin(\omega) \\ \cos(\omega) & -1+\cos(\omega) \end{vmatrix}}{2(1-\cos(\omega))} = \frac{-\sin(\omega)}{2(1-\cos(\omega))},$$

$$B_0 = \frac{\begin{vmatrix} -1+\cos(\omega) & \sin(\omega) \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{vmatrix}}{2(1-\cos(\omega))} = \frac{1}{2}.$$

Los cálculos se completan como en los casos anteriores: ahora $C = \sin(\omega)/(2(1-\cos(\omega)))$ y

$$S_\omega(n) = \frac{\sin(\omega)(1-\cos(n\omega))}{2(1-\cos(\omega))} + \frac{1}{2}\sin(n\omega). \quad (22)$$

Ahora aplicando diferentes fórmulas trigonométricas básicas, puede verse fácilmente que (22) es equivalente a

$$S_\omega(n) = \frac{\sin\left(\frac{n\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \tag{23}$$

la cual es más frecuente en la literatura, [3, pág. 51].

7 Conclusiones

En este trabajo se ha proporcionado una metodología sencilla para obtener la suma de numerosas sumas parciales notables que aparecen en un curso introductorio de Cálculo Infinitesimal, a partir de la aplicación del método de los coeficientes indeterminados discreto. La ventaja de este enfoque, es que proporciona una marco común desde el cual abordar este interesante problema que usualmente requiere de una estrategia distinta dependiendo de la suma que se desee evaluar.

Referencias

[1] Boyer C.B. (1987), *Historia de la Matemática*. Ed. Alianza Universidad. Madrid.

[2] Apostol T.M. (1989), *Calculus*. Vol.1. Ed. Reverté. Barcelona.

[3] Shklarsky D.O., Chentzov N.N., Yaglom I.M. (1993), *The URSS Olympiad Problem Book*. Ed. Dover. New York.

[4] Nelsen R.B. (2001), *Demostraciones sin Palabras*. Ed. Proyecto Sur. Granada.

[5] Aledo J.A., Cortés J.C. (2003), *La suma de potencias de Bernouilli: un problema histórico*, Bol. Puig Adam, vol. 64, 35-44.

[6] Lewis B. (1983), *Matemáticas Modernas. Aspectos Recreativos*. Ed. Alhambra. Madrid.

[7] Fernández F., García Mª.D. (2001), *Métodos Matemáticos en Economía Dinámica*. Vol. 1. Colección Textos Universitarios. Ed. Gobierno de Canarias (Consejería de Educación, Cultura y Deportes). Canarias.

[8] Fernández Viña J.A. (1981), *Lecciones de Análisis Matemático I*. Ed. Tecnos. Madrid.

[9] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. (1994), *Table of Integrals, Series and Products*. Fifth Ed.. Ed. Academic Press. New York.

$\mathbb{R}$_álgebras de dimensión 2 y métricas del plano real

Santiago Mazuelas Franco

Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología. Univ. Valladolid
smazuelas@cedetel.es

Abstract

The relation between complex numbers and euclidean plane geometry is widely known. For instance, by means of the identification of the real plane with the field of complex numbers we can represent the inversive euclidean group in the plane by the moebius group.

In this paper we define and present the main properties of the different types of two dimensional $\mathbb{R}$_algebras, as well as the complex numbers. We show that there are only three types of two dimensional $\mathbb{R}$_algebras with unity: complex ($\mathbb{C}$), paracomplex ($\mathbb{M}$) or dual numbers ($\mathbb{D}$); we study the basic properties of these rings and his geometric role in terms of plane metrics, for example we define the cycles, for the different geometry types, by means of cross ratios.

1. Introducción

Un plano métrico real es un par $(\mathbb{A}, F)$, donde $\mathbb{A}$ es un plano afín real de plano vectorial asociado V y F es una forma bilineal simétrica en V. Así, el tipo de métrica viene determinado por el tipo de la forma bilineal simétrica F, que corresponde a lo que podemos llamar producto escalar.

Si proyectivizamos dicha estructura, podemos sumergir el plano afín en el plano proyectivo y el espacio vectorial asociado se identifica de modo natural con la recta del infinito de la inmersión. La forma bilineal F describe entonces una cónica, $[Q]_\infty$, en la recta del infinito, pero esta cónica no proporciona la misma información que F, ya que determina F salvo un factor de proporcionalidad. Así, el par $(\mathbb{A}, [Q]_\infty)$ refleja la "estructura conforme" del plano métrico.

En la geometría euclídea, la forma bilineal es definida positiva y en consecuencia la cuádrica asociada es un par de puntos imaginarios conjugados. Clásicamente a esos dos puntos se les conoce como puntos cíclicos del plano, debido al hecho de que una cónica real no degenerada es una circunferencia si y sólo si pasa por esos puntos.

En un trabajo anterior [1], hemos visto como se puede sumergir el plano métrico en un plano proyectivo y este en un espacio de dimensión 3, en el cual vía proyección estereográfica se puede asociar el plano con una cuádrica real irreducible, cuya geometría intrínseca se traduce en la geometría métrica del plano. Por ejemplo, esta cuádrica del espacio determina la cónica del infinito $[Q]_\infty$, al restringirla a la recta del infinito del plano.

Como es bien sabido, para el caso euclídeo, la construcción anterior es la de la esfera de Riemman y se puede reproducir también la geometría euclídea del plano a partir de la estructura algebraica del cuerpo complejo. Esta construcción clásica que asocia el plano euclídeo con la $\mathbb{R}$_álgebra $\mathbb{C}$ o con la cuádrica de puntos del espacio (esfera), permite:

1. Determinar la cónica del infinito (los dos puntos cíclicos), a partir de las tangentes al polo de la proyección contenidas en la cuádrica (cono imaginario) o a partir de los elementos de norma nula de la $\mathbb{R}$_álgebra (cono imaginario).

2. Definir de forma intrínseca los ciclos; geométricamente como secciones planas de la esfera o algebráicamente a partir de la razón doble de números complejos.

3. Representar linealmente el grupo inversivo del plano, es decir el grupo de transformaciones generado por movimientos, homotecias e inversiones; en la $\mathbb{R}$_álgebra $\mathbb{C}$ como el grupo de Möbius y en la esfera como restricción del grupo de proyectividades del espacio que dejan invariante la esfera.

Nuestro objetivo, en esta serie de trabajos, es generalizar esta construcción a los otros tipos de geometrías métricas del plano, escogiendo otras cuádricas y otras $\mathbb{R}$_álgebras. Por ejemplo, para los otros tipos de geometrías métricas del plano, las cónicas del infinito son reales y por lo tanto los conos que las determinan también son reales. En un artículo anterior [1] hemos estudiado la generalización de la proyección estereográfica a cuadricas generales, describiendo los ciclos en el plano como proyecciones de secciones planas de la cuádrica en cuestión.

En este segundo trabajo vamos a obtener alternativas al cuerpo complejo, mediante el estudio de las posibles estructuras de $\mathbb{R}$_álgebra sobre $\mathbb{R}^2$, veremos que se pierde el carácter de cuerpo pero queda suficiente estructura algebraica para poder definir una razón doble; mediante la cual podemos definir los ciclos igual que en el caso complejo.

Como se conoce, para la construcción clásica de la esfera de Riemann, los dos objetos con los que se asocia al plano euclídeo: esfera y cuerpo complejo; son el mismo via paso a la recta proyectiva compleja, y lo que se está haciendo realmente es compactificar el plano añadiéndole un punto. Esta compactificación permite representar el grupo inversivo para la geometría euclídea del plano de una forma lineal, ya sea como restricción de proyectividades del espacio que dejan invariante la esfera o como automorfismos de la recta proyectiva compleja (transformaciones de Möbius). En un tercer trabajo veremos como también sobre las $\mathbb{R}$_álgebras que definimos en este artículo, podemos definir rectas proyectivas, que esas rectas proyectivas coinciden con las cuádricas que estudiábamos en el artículo [1] ya que lo que estamos haciendo es elegir distintas compactificaciones para el plano y que cada tipo de compactificación nos permite representar linealmente los grupos inversivos para cada una de las geometrías métricas del plano; cerrando así el cuadro Geometrías métricas del plano $\equiv$ Cuádricas del espacio $\equiv$ Rectas proyectivas.

Por lo tanto, con esta serie de trabajos, vamos a conseguir interpretaciones proyectivas de las geometrías métricas del plano real, comprobando que cada geometría lleva consigo una compactificación de $\mathbb{R}^2$ ya sea sumergiendo en una cuádrica proyectiva o equivalentemente en la recta proyectiva sobre una $\mathbb{R}$_álgebra real bidimensional. Estas compactificaciones están ligadas directamente a la métrica del plano y por ejemplo nos permiten representar de manera lineal el grupo inversivo para cada métrica.

El grupo inversivo que en dimensiones mayores coincide con el grupo conforme es de gran importancia, por ejemplo, en muchas disciplinas de la física y por tanto representaciones matriciales y sencillas de dicho grupo son de gran utilidad.

2. $\mathbb{R}$_álgebras de dimensión 2

Sea $\mathbb{K}$ una $\mathbb{R}$_álgebra de dimensión finita n, es decir, un anillo no necesariamente conmutativo, con 1, que además es un $\mathbb{R}$_espacio vectorial de dimensión finita.

Proposición 1 *Sea $\mathbb{K}$ una $\mathbb{R}$_álgebra de dimensión n, todo elemento de $\mathbb{K}$ es algebraico sobre $\mathbb{R}$, de grado menor o igual que n.*

`Demostración`

Sea $z \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{R}$_espacio vectorial de dimensión finita n, entonces $\{1, z, z^2, \ldots, z^n\}$ es un sistema linealmente dependiente. Sea $\lambda_0 1+\lambda_1 z+\lambda_2 z^2+ \ldots + \lambda_n z^n = 0$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y alguno distinto de cero.

$P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$, $P(z) = 0$. ■

Sea $I_z = \{P(x) \in \mathbb{R}[x] : \ P(z) = 0\}$, como $\mathbb{R}[x]$ es un dominio de ideales principales $I_z = (m_z)$ con $m_z \in \mathbb{R}[x]$ mónico, además m_z es el único polinomio de grado mínimo que está en I_z y es mónico.

Definición 1 *Sea $z \in \mathbb{K}$, llamamos polinomio mínimo de z al polinomio mónico m_z anterior, sean $m_z = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ y $s = \frac{n}{r}$. Llamamos norma de z al número real $(-1)^n (a_0)^s$ y traza al número $-sa_{r-1}$*

Nota 1 *El homomorfismo estructural*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$1_{\mathbb{R}} \longmapsto 1_{\mathbb{K}}$$

es inyectivo al ser no nulo y $\mathbb{R}$ cuerpo.

Por lo tanto $1_{\mathbb{K}}$ es parte libre en el $\mathbb{R}$_espacio vectorial $\mathbb{K}$ y puedo extender $\{1_{\mathbb{K}}\}$ a una base de $\mathbb{K}$.

Nota 2 *Para $n = 2$, sea $\xi \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$, obviamente $\{1, \xi\}$ es parte libre en $\mathbb{K}$ y por lo tanto $\{1, \xi\}$ es una base del $\mathbb{R}$_espacio vectorial $\mathbb{K}$. Además como $1 \cdot \xi = \xi \cdot 1$, se tiene que el anillo $\mathbb{K}$ es conmutativo.*

Sin embargo, para dimensiones mayores, las $\mathbb{R}$_álgebras no tienen por que ser conmutativas. Por ejemplo el cuerpo de los números cuaternionicos es una $\mathbb{R}$_álgebra de dimensión 4 que no es conmutativa.

Proposición 2 *$\mathbb{K}$ es una $\mathbb{R}$_álgebra con 1, de dimensión dos, si y sólo si es una extensión algebraica de $\mathbb{R}$ de grado dos.*

`Demostración`

$\lfloor\Leftarrow\rceil$ Trivial

$\lfloor\Rightarrow\rceil$ Sea $\{1, \xi\}$ una base de $\mathbb{K}$, $\xi^2 = a + b\xi \in \mathbb{K}$ entonces

$$\mathbb{K} = \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2 - bx - a} \blacksquare$$

Vamos a estudiar las $\mathbb{R}$_álgebras extensión de grado dos del cuerpo real, de las cuales vamos a ver que, módulo isomorfismo, sólo hay tres.

Proposición 3 *Sea $\mathbb{K} = \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2+bx+c} = \mathbb{R}[\xi]$, $z = \alpha + \xi\beta \in \mathbb{K}$*

- *Si $\beta = 0$ entonces $m_z = x - \alpha$.*
- *Si $\beta \neq 0$ entonces $m_z = x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_1 = b\beta - 2\alpha$ y $a_0 = \alpha^2 + c\beta^2 - b\alpha\beta$.*

`Demostración`

- Si $\beta = 0$ trivial.
- Si $\beta \neq 0$ Basta con observar que el grado de m_z tiene que ser ≥ 2 ya que $z \notin \mathbb{R}$ y que el polinomio del enunciado es mónico y se anula en $z = \alpha + \xi\beta$.

Corolario 1 *Si $z = \alpha + \beta\xi \in \mathbb{K} = \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2+bx+c}$, Norma$(z) = \alpha^2 - b\alpha\beta + c\beta^2$ y Traza$(z) = 2\alpha - b\beta$.*

Definición 2 *Sea* $z = \alpha + \beta\xi \in \mathbb{K} = \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2+bx+c}$ *se define el módulo de* z *como*

$$|z| = \sqrt{Norma(z)} = \sqrt{\alpha^2 - b\alpha\beta + c\beta^2}$$

en el caso de existir.

Proposición 4 *Las únicas extensiones de grado 2 de los números reales, salvo isomorfismo, son:*

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}, \ \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2-1)} \ \acute{o} \ \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2)}$$

`Demostración`

Si $\mathbb{K}$ es una extensión de grado 2 de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{K} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+bx+c)} = \mathbb{R}[\xi]; \ m_\xi = x^2 + bx + c$$

Hay tres posibilidades:

1.- $x^2 + bx + c$ tiene dos raíces imaginarias conjugadas $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ y entonces $x^2 + bx + c = (x-\alpha)^2 + \beta^2$, $\beta \neq 0$.

Sea Φ el homomorfismo:

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\xi] \\ & x & \longmapsto & \frac{\xi-\alpha}{\beta} \end{array}$$

con $(\xi-\alpha)^2 + \beta^2 = 0$

- Φ es sobreyectiva ya que $\Phi(\beta x + \alpha) = \xi$
- $\ker(\Phi) = (x^2+1)$: Como $\Phi(x^2+1) = (\frac{\xi-\alpha}{\beta})^2 + 1 = 0$ entonces $(x^2+1) \subseteq \ker(\Phi)$. Como $\ker(\Phi) \neq \mathbb{R}[x]$ y como (x^2+1) es maximal en $\mathbb{R}[x]$ entonces $\ker(\Phi) = (x^2+1)$. Así pues

$$\mathbb{K} \simeq \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)}$$

2.- $x^2 + bx + c$ tiene dos raíces reales distintas r_1 y r_2 y entonces $x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2)$

Sea Φ el homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\xi] \\ & x & \longmapsto & \frac{2}{r_2 - r_1}\xi - \frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1} \end{array}$$

con $(\xi - r_1)(\xi - r_2) = 0$

- Φ es sobreyectiva ya que $\Phi(\frac{r_2 - r_1}{2}x - \frac{r_1 + r_2}{2}) = \xi$
- $(x^2 - 1) \subseteq \ker \Phi$ ya que $\Phi(x)^2 - 1 = 0$ como $(x^2 - 1) = ((x+1)(x-1))$ y $(x \pm 1)$ son maximales y no están en $\ker(\Phi)$ entonces $\ker(\Phi) = (x^2 - 1)$

$$\Rightarrow \mathbb{K} \simeq \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2 - 1)}$$

3.- $x^2 + bx + c$ tiene una raíz real doble r_1 entonces $x^2 + bx + a = (x - r_1)^2$. Sea Φ el homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\xi] \\ & x & \longmapsto & \xi - r_1 \end{array}$$

- Φ es sobreyectiva: trivial.
- $\ker(\Phi) = (x^2)$ análogamente al caso anterior.

Entonces

$$\mathbb{K} \simeq \frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2)} \blacksquare$$

Definición 3 *Llamamos:*

- *Números complejos a*

$$\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2 + 1} = \{\alpha + i\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

- *Números paracomplejos a*

$$\mathbb{M} = \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2 - 1} = \{\alpha + j\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, j^2 = 1\}$$

- *Números duales a*

$$\mathbb{D} = \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2} = \{\alpha + \varepsilon\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$$

Toda $\mathbb{R}$_álgebra extensión de grado 2 del cuerpo real es isomorfa a alguna de estas tres. De las que sólo la de los números complejos es cuerpo.

Nota 3 *Los números paracomplejos, $\mathbb{M}$, son también conocidos como motores, ya que es el nombre que les da Clifford al utilizarlos para para representar sumas de espines.*

Nota 4 *Los números duales se utilizan como un análogo algebraico al análisis no estandar, por ejemplo en el estudio de las deformaciones infinitesimales en geometría algebraica. Obsérvese que en la expresión $\alpha + \beta\varepsilon$, α juega el papel de "parte finita" del número y β el de "parte infinitesimal", ya que al realizar el producto de dos números duales se "desprecian" los infinitésimos de segundo orden, es decir, los términos en ε^2.*

Nota 5 *Concretamente los isomorfismos de la proposición anterior son:*

- *Si x^2+bx+c tiene dos raíces complejas conjugadas, $\alpha \pm \beta i$, $x^2+bx+c = (x-\alpha)^2 + \beta^2$*

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathbb{R}[x]}{(x-\alpha)^2+\beta^2} : & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ a + b\xi & \longmapsto & a + b\alpha + b\beta i \end{array}$$

- *Si $x^2 + bx + c$ tiene dos raíces reales distintas, r_1 y r_2, $x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2)$*

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathbb{R}[x]}{(x-r_1)(x-r_2)} : & \longrightarrow & \mathbb{M} \\ a + b\xi & \longmapsto & a + \frac{b(r_2+r_1)}{2} + \frac{b(r_2-r_1)}{2}j \end{array}$$

- *Si x^2+bx+c tiene una raíz real doble r_1, $x^2+bx+c=(x-r_1)^2$*

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathbb{R}[x]}{(x-r_1)^2}: & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ a+b\xi & \longmapsto & a+br_1+b\varepsilon \end{array}$$

En cada una de estas $\mathbb{R}$_álgebras, las expresiones para los módulos son:

- $|\alpha+i\beta|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$
- $|\alpha+j\beta|=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$
- $|\alpha+\varepsilon\beta|=|\alpha|$

El módulo de z está definido si:

- Caso $\mathbb{C}$: para cualquier z.
- Caso $\mathbb{M}$: si $\{\alpha\geq\beta$ y $\alpha\geq-\beta\}$ o $\{\alpha\leq\beta$ y $\alpha\leq-\beta\}$.
- Caso $\mathbb{D}$: para cualquier z.

Proposición 5 *Sea Φ un homomorfismo de $\mathbb{R}$_álgebras entre $\mathbb{K}_1$ y $\mathbb{K}_2$. Son equivalentes:*

1. *Φ es inyectivo.*
2. *$\forall\ z\in\mathbb{K}_1$, el polinomio mínimo de z es el mismo que el de $\Phi(z)$*

`Demostración`

1)⇒2) Sea $m_z\in\mathbb{R}[x]$ el polinomio mínimo de z, como Φ es homomorfismo $m_z(\Phi(z))=0$. Y si $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ con $P(\Phi(z))=0$

$$0=P(\Phi(z))=\Phi(P(z))\Rightarrow P(z)=0$$

ya que $\ker\Phi=\{0\}$ al ser inyectivo. Entonces $P(x)=S(x)m_z(x)\Rightarrow P(x)\in(m_z(x))$.

2)⇒1) $\ker(\Phi)=\{0\}$, ya que si existiera $z\in\mathbb{K}_1\backslash\{0\}$ con $\Phi(z)=0$ entonces el polinomio mínimo de z sería el mismo que el de 0, lo que es absurdo ■

Corolario 2 *Un isomorfismo de $\mathbb{R}$_álgebras deja invariante la norma y la traza.*

Este corolario también nos indica que para la elección de la norma en una $\mathbb{R}$_algebra de dimensión 2 solamente hay las tres opciones vistas para los casos de $\mathbb{C}$, $\mathbb{M}$ y $\mathbb{D}$. Cosa que sugiere una conexión con el hecho de que solamente hay tres tipos de formas cuadráticas en dimensión dos, según su rango y su signatura proyectiva:

- Rango 2 y signatura 2: caso $\mathbb{C}$.
- Rango 2 y signatura 0: caso $\mathbb{M}$.
- Rango 1 y signatura 1: caso $\mathbb{D}$.

Así pues a partir de ahora podemos suponer sin pérdida de generalidad que la $\mathbb{R}$_álgebra $\mathbb{K}$, extensión de grado 2 del cuerpo real, es alguna de las tres $\mathbb{R}$_álgebras $\mathbb{C}$, $\mathbb{M}$ o $\mathbb{D}$.

Definición 4 *Sea $\mathbb{K}$ una $\mathbb{R}$_álgebra de dimensión 2 y $z \in \mathbb{K}$, llamamos conjugado de z en $\mathbb{K}$ a un $\bar{z} \in \mathbb{K}$ tal que $(x - z)(x - \bar{z}) = m_z$.*

Proposición 6 *El conjugado existe y es único.*

Nota 6 *Sea $z = a + b\xi \in \mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{M}$ o $\mathbb{D}$, el conjugado de z es $\bar{z} = a - b\xi$.*

Nota 7 *Se tiene que*

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \ \forall z \in \mathbb{K}$$

Nota 8 *Para cada tipo de $\mathbb{R}$_álgebra la correspondencia de conjugación es*

$$\begin{array}{cccc} - : & \frac{\mathbb{R}[x]}{(x-\alpha)^2+\beta^2} : & \longrightarrow & \frac{\mathbb{R}[x]}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \\ & z = a + b\xi & \longmapsto & \bar{z} = a + 2b\alpha - b\xi \\ - : & \frac{\mathbb{R}[x]}{(x-r_1)(x-r_2)} : & \longrightarrow & \frac{\mathbb{R}[x]}{(x-r_1)(x-r_2)} \\ & z = a + b\xi & \longmapsto & \bar{z} = a + b(r_2 + r_1) - b\xi \\ - : & \frac{\mathbb{R}[x]}{(x-r_1)^2} : & \longrightarrow & \frac{\mathbb{R}[x]}{(x-r_1)^2} \\ & z = a + b\xi & \longmapsto & \bar{z} = a + 2br_1 - b\xi \end{array}$$

Nota 9 *Obsérvese que la correspondencia de conjugación*

$$\begin{array}{cccc} ^{-} : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$$

verifica:

C1 $\overline{}$ *es* $\mathbb{R}$*_lineal*

C2 $\overline{1_{\mathbb{K}}} = 1_{\mathbb{K}}$

C3 $\overline{\overline{z}} = z$

C4 $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

y que recíprocamente si una aplicación verifica esas 4 propiedades es la conjugación.

Definición 5 *Llamamos casi cuerpo a un anillo unitario y normado, en el que los elementos no inversibles coinciden con los elementos de norma nula.*

Proposición 7 *Una* $\mathbb{R}$*_álgebra con 1, de dimensión 2, es un casi cuerpo conmutativo. Además se tiene que*

- z *es divisor de zero* $\Leftrightarrow$ z *es no inversible*
- *Si* z *es divisor de zero,* $zz' = 0$ *con* $z' \neq 0$ *si y sólo si*

$$z' = \lambda \bar{z}, \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- *Si* z *es inversible, entonces*

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Nota 10 *Identificando el plano* $\mathbb{R}^2$ *con cada una de las* $\mathbb{R}$*_álgebras* $\mathbb{C}$*,* $\mathbb{M}$ *y* $\mathbb{D}$*, los divisores de cero son:*

- *Caso* $\mathbb{C}$*, no hay divisores de cero. Por abuso de lenguaje, viendo* $\mathbb{C}$ *como* $\mathbb{R}^2$ *son las dos rectas imaginarias dadas por* $x^2 + y^2 = 0$*.*
- *Caso* $\mathbb{M}$*, son las dos rectas* $x^2 - y^2 = 0$ *que son las dos rectas que pasan por el origen y tienen pendientes* ± 1*. Además para que el producto de dos paracomplejos valga 0, el punto correspondiente a cada uno de ellos debe estar en una de esas dos rectas.*

- *Caso $\mathbb{D}$, es la recta doble $x^2 = 0$. Además ahora para que el producto sea cero los dos puntos tiene que estar en esa recta.*

Nota 11 *Las raíces de los polinomios que definen las extensiones son:*

1. *Caso $\mathbb{C}$, las únicas raíces son $\pm i$.*
2. *Caso $\mathbb{M}$, las raices son ± 1 y $\pm j$.*
3. *Caso $\mathbb{D}$, hay infinitas raices, que son $\lambda\varepsilon$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Nota 12 *Observese que un homomorfismo de $\mathbb{R}$_álgebras de dimensión 2, $\Phi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ queda univocamente determinado por la imagen de un elemento cuyo polinomio mínimo sea el polinomio que define la extensión, que la imagen de ese elemento ha de seguir siendo una raíz de ese polinomio y que el homomorfismo será inyectivo si el polinomio mínimo de la imagen sigue siendo el polinomio que define la extensión.*

Por lo tanto los únicos homomorfismos de $\mathbb{R}$_álgebras, para cada caso son:

- *Caso $\mathbb{C}$: la identidad y la conjugación.*
- *Caso $\mathbb{M}$: la identidad, la conjugación y las dos aplicaciones*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M} & \longrightarrow & \mathbb{M} \\ a+bj & \longmapsto & a+b \\ a+bj & \longmapsto & a-b \end{array}$$

- *Caso $\mathbb{D}$: las infinitas aplicaciones*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ a+b\varepsilon & \longmapsto & a+b\lambda\varepsilon \end{array}$$

De los cuales son automorfismos sólo la identidad y la conjugación.

Proposición 8 *Sea $\mathbb{K}$ una $\mathbb{R}$_álgebra de dimensión 2, con uno. La correspondencia*

$$|\ | : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

verifica:

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{K}$.

2. $|\lambda z| = |\lambda||z|$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *y* $z \in \mathbb{K}$

3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Obviamente siempre que estas normas existan.

`Demostración`
1) y 2) son triviales observando que la conjugación es un automorfismo.
3) demostramos el caso $\mathbb{K} = \mathbb{M}$ ya que los otros son triviales.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2 \leq \alpha_1^2 - \beta_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_2^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \alpha_2 \leq \beta_1 \beta_2$$

según las condiciones que tiene que cumplir un punto para que esté definida su norma hay 4 casos posibles. Si por ejemplo $\alpha_1 \geq \beta_1$ y $\alpha_1 \geq -\beta_1 \Rightarrow \alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \leq \beta_2$ y $\alpha_2 \leq -\beta_2 \Rightarrow \alpha_2 \leq 0$.

$$\alpha_2 \leq -\beta_2 \Rightarrow \alpha_1 \alpha_2 \leq -\alpha_1 \beta_2 \leq \beta_1 \beta_2$$

3. Razón doble

En lo que sigue la $\mathbb{R}$_álgebra $\mathbb{K}$ será $\mathbb{C}$, $\mathbb{M}$ o $\mathbb{D}$.

Definición 6 *Dados $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{K}$ con $z_i = \alpha_i + \xi \beta_i$. Llamamos razón doble de esos 4 puntos a:*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}$$

siempre que ese cociente sea un elemento inversible de $\mathbb{K}$.

Nota 13 *La condición sobre los puntos, para que la razón doble esté definida para cualquier ordenación de los puntos, se traduce geométricamente (identificando $\mathbb{K}$ con $\mathbb{R}^2$) en:*

- *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ la razón doble está definida si los cuatro puntos son distintos.*

- *Si $\mathbb{K} = \mathbb{M}$ la razón doble está definida siempre que no haya dos puntos que estén en rectas de pendientes ± 1*

- *Si $\mathbb{K} = \mathbb{D}$ la razón doble está definida siempre que dos puntos no estén en rectas paralelas al eje y*

Como se vio en [1], elegida un tipo de cuádrica en el espacio, los ciclos del plano son las proyecciones estereográficas de secciones planas de la cuádrica. Los ciclos no degenerados son proyecciones de secciones planas no tangentes y los ciclos degenerados se corresponden con secciones planas tangentes. En [1] vimos que, eligiendo una referencia adecuada, los ciclos no degenerados eran, según el tipo de cuádrica elegida:

- Caso cuádrica de puntos: rectas y circunferencias.

- Caso cuádrica de rectas: rectas de pendientes distintas a ± 1 e hipérbolas con asíntotas de pendientes ± 1.

- Caso cono real: rectas de pendientes distintas de ∞ y parabolas con eje de pendiente ∞.

Por lo tanto, identificando $\mathbb{K}$ con $\mathbb{R}^2$, obtenemos que 3 puntos definen un único ciclo no degenerado siempre que se pueda definir su razón doble y además la razón doble nos da una forma algebraica de definir los ciclos no degenerados:

Proposición 9 *Sean z_1, z_2 ý z_3 tres puntos de $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}^2$ tales que determinan un único ciclo no degenerado, según lo anterior. Otro punto $z \in \mathbb{K}$ está en el ciclo definido por z_1, z_2 ý z_3 si y sólo si $[z_1, z_2, z_3, z] \in \mathbb{R}$.*

`Demostración`

La razón doble está definida precisamente porque los tres puntos definen un único ciclo no degenerado.

1. Si los tres puntos están alineados (el ciclo es una recta)

$$[z_1, z_2, z_3, z] = \frac{(z_1 - z)(z_2 - z_3)}{(z_3 - z_1)(z - z_2)} = \frac{(z_1 - z)\lambda(z_3 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z - z_2)} \in \mathbb{R}$$

   si y sólo si z está en la recta $\{z_1, z_2, z_3\}$.

2. En otro caso. Sea $z = x + \xi y$. Con $\xi = i, j$ ó ε según el caso.

$$[z_1, z_2, z_3, z] = \frac{p_1(x, y) + \xi p_2(x, y)}{p_3(x, y) + \xi p_4(x, y)}$$

donde

$$p_i(x, y) = a_i x + b_i y + K$$

$$a_1 = \alpha_3 - \alpha_2, \ a_2 = \beta_3 - \beta_2, \ a_3 = \alpha_3 - \alpha_1, \ a_4 = \beta_3 - \beta_1$$

$$b_1 = \xi^2 a_4, \ b_2 = a_3, \ b_3 = \xi^2 a_2, \ b_4 = a_1$$

$$[z_1, z_2, z_3, z] = \frac{(p_1(x, y) + \xi p_2(x, y))(p_3(x, y) - \xi p_4(x, y))}{p_3(x, y)^2 - \xi^2 p_4(x, y)^2} \in \mathbb{R}$$

si y sólo si

$$p_3(x, y)p_2(x, y) - p_1(x, y)p_4(x, y) = 0$$

que es la ecuación de una cónica.

$$p_3(x, y)p_2(x, y) - p_1(x, y)p_4(x, y) = (a_2a_3 - a_1a_4)x^2 + (b_2b_3 - b_1b_4)y^2 +$$

$$+(a_3b_2 + a_2b_3 - a_1b_4 - a_4b_1)xy + r(x, y) =$$

$$= (a_2a_3 - a_1a_4)x^2 - \xi^2(a_2a_3 - a_1a_4)y^2 + r(x, y)$$

siendo $r(x, y)$ un polinomio de grado 1, y además

$$a_2a_3 - a_1a_4 = (\alpha_3 - \alpha_1)(\beta_3 - \beta_2) - (\beta_3 - \beta_2)(\alpha_3 - \alpha_2) \neq 0$$

ya que los puntos z_1, z_2 y z_3 no están en la misma recta.

Homogeneizando la ecuación de la cónica, la intersección de la cónica con el infinito es:

- Caso $\mathbb{C}$ ($\xi^2 = -1$): $x^2 + y^2 = 0$. Los puntos $[0, 1, i]$ y $[0, 1, -i]$. Así, según lo visto en el artículo anterior, en el plano euclídeo usual, la cónica es una circunferencia.
- Caso $\mathbb{M}$ ($\xi^2 = 1$): $x^2 - y^2 = 0$. Los puntos $[0, 1, 1]$ y $[0, 1, -1]$. Por lo que la cónica, en el plano euclídeo usual, es una hipérbola equilátera.

- Caso $\mathbb{D}$ ($\xi^2 = 0$): $x^2 = 0$. El punto doble $[0, 0, 1]$ y entonces la cónica, en el plano euclídeo usual, es una parábola con eje de pendiente 0. ■

Proposición 10 *Los homomorfismos de $\mathbb{R}$_álgebras dejan invariante la razón doble de puntos de un ciclo no degenerado.*

Corolario 3
- *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{M}$ o $\mathbb{D}$, el automorfismo conjugación*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \alpha + \xi\beta & \longmapsto & \alpha - \xi\beta \end{array}$$

- *En el caso $\mathbb{M}$, la aplicaciones lineales no inyectivas*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M} & \longrightarrow & \mathbb{M} \\ \alpha + \xi\beta & \longmapsto & \alpha + \beta \\ \alpha + \xi\beta & \longmapsto & \alpha - \beta \end{array}$$

- *En el caso $\mathbb{D}$, la aplicación lineal no inyectiva*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ \alpha + \xi\beta & \longmapsto & \alpha \end{array}$$

Conservan la razón doble de puntos de un ciclo no degenerado.

Bibliografía

[1] S. Mazuelas Franco. "Proyecciones estereográficas y Geometrías en el plano". *Boletin Sociedad Piug Adam (75)* pag. 37-54 ISSN: 11350261, 2007.

[2] Aroca J.M. Fdez. Bermejo M.J. *Notas de geometria proyectiva.* Preprint U.V.A 2003

[3] Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées. *Tome III (premier volume) Fondements de la Géométrie.* Ed Jacques Gabay 1991.

[4] Klein F. *Geometria elemental desde un punto de vista superior*. Ed CSIC Madrid 1954.

[5] Klein F. *Über die Sogenannte nicht Euklidische Deometrie*. Math. Ann. 4, 1871. Pag 254-305.

[6] Klein F. *Vorlesungen Über nicht Euklidische Geometrie*. Chelsea New York 1967. (Reedición).

[7] Cayley A. *A Sixth Memoir upon Quantics*. Phil. Trans. Royal Society London 149, 1859. Pag 61-90.

[8] J. Rey Pastor *Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior*.Junta para la ampliación de estudios e investigaciones científicas, 1916

Aplicación de un contraste de hipótesis para descubrir los factores que posibilitan el éxito en la implantación de un sistema de información

Celia Gutiérrez

celiagutierrez@hotmail.com

Abstract

This work shows an application of statistical tests in order to decide which enterprise factors make an information system successful. The information system chosen is a datawarehouse. Datawarehouse systems have improved during the last years and they have become a powerful tool for decision taking. Therefore, enterprises' benefits can increase if the implementations have been performed properly. Implementation factors belong to different classes and there are several theoretical models which show relations among them. The following models: Descriptive Statistics (to extract and analyze information), Statistical modelization (to discover correlations between factors) and Statistical Inference (to test hypotheses) have been applied to test if relations within the system hold. Valuable information about the key factors that facilitate the successful implementation of a datawarehouse is obtained this way.

Introducción

Entre las distintas variantes de la Estadística Aplicada están la Estadística Descriptiva y la Inferencia Estadística. La primera trata de analizar y representar los datos. Cuando se analizan datos, se suelen fijar dos objetivos: comparar grupos y establecer relaciones. Este estudio se centra en el segundo objetivo, relaciones entre dos variables ó correlaciones bivariadas. Los campos de aplicación de analizar las correlaciones bivariadas son innumerables. En [1] se trata de correlaciones en el ámbito biomédico, y en [2] busca correlaciones en el área económica, por mencionar algunos ejemplos. El caso que se va a tratar, versa sobre un tipo de sistema de información llamado datawarehouse, cuyo éxito ha aumentado últimamente. El concepto de datawarehouse nace hace más de una década con [3] ligado al concepto EIS ó (Executive Information System), el sistema de información ejecutivo de una organización. Según [3] y [4], el almacén de datos es una "colección de datos, orientada a un dominio, integrada, no volátil y variante en el tiempo para ayudar en las decisiones de dirección". Como muestra esta definición, los datawarehouse juegan un papel clave a nivel de estrategia empresarial. Los sistemas datawarehouse ó almacenes de datos son una parte clave en el KDD, conocido como Knowledge Database Discovery ó Descubrimiento de Conocimiento en las Bases de Datos, como se puede ver en el gráfico 1, obtenido de [5]:

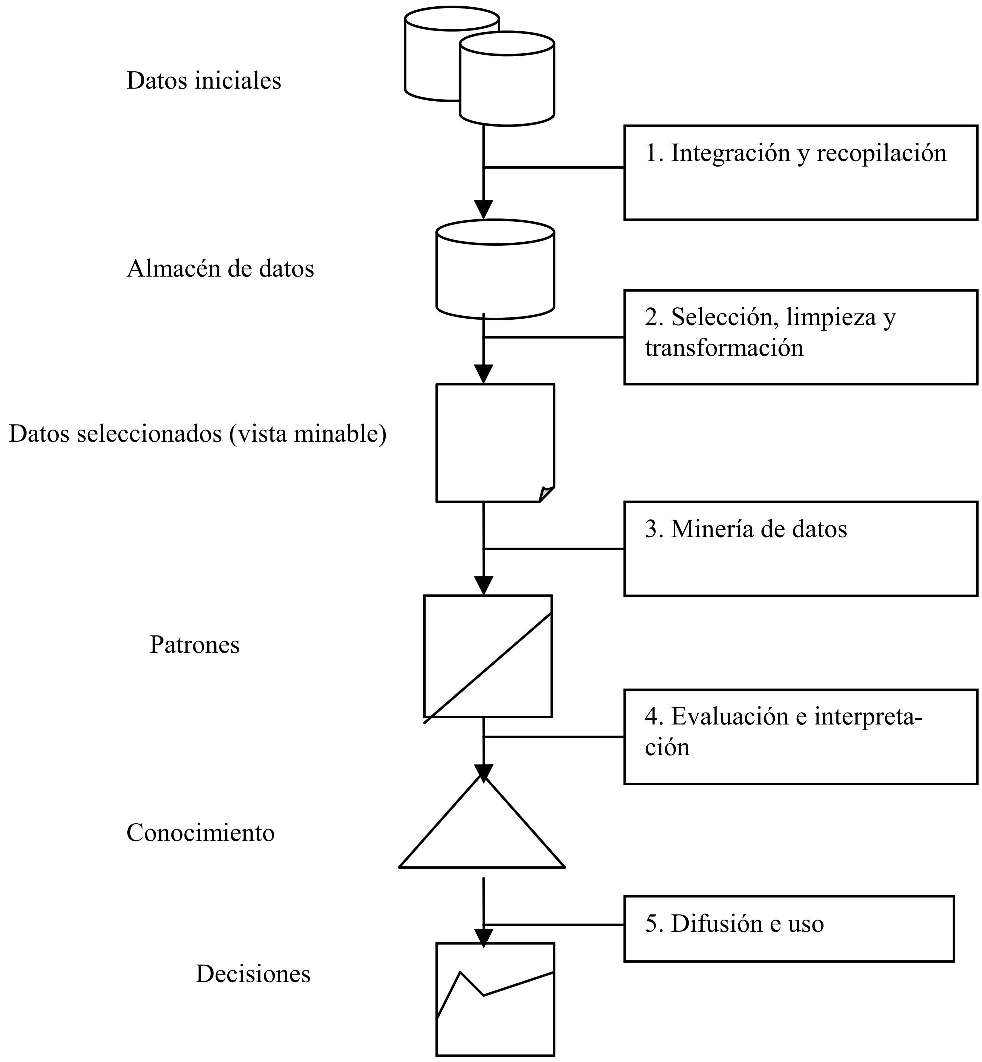


Figura 1. *Proceso KDD*

Básicamente un sistema datawarehouse integra varias fuentes de datos, tanto internas de la empresa como externas en un proceso llamado Integración y recopilación, aunque técnicamente se le conoce como ETL (Extract, Transformation and Loading ó Extracción, Transformación y Carga). Los sistemas datawarehouse no solo pueden ser usados a nivel de toma de decisiones empresariales, sino también para todas las áreas de conocimiento en los que se descubran patrones. El uso final que se hace del sistema datawarehouse es el de Minería de Datos en el proceso KDD. Aunque existen varias definiciones para la Minería de Datos, [6] establece que "es el proceso de extraer información válida, previamente desconocida, comprensible y útil de bases de datos de gran tamaño y utilizar dicha información para tomar decisiones de negocio cruciales". Sin embargo, la implementación de un datawarehouse en una empresa es una tarea compleja y costosa. Por tanto, si se ha realizado adecuadamente, redundará en una mejoría en la toma decisiones, y finalmente en beneficios netos. El presente estudio pretende reflejar la correlación entre los factores que intervienen en la implementación de un datawarehouse, lo cual puede ayudar a la futura construcción de datawarehouses con más garantías de éxito. Muestra por tanto, la potencia que pueden tener las herramientas estadísticas para obtener conclusiones valiosas en la toma de decisiones estratégicas empresariales. Además, aunque existen estudios relativos a descubrir las causas de fracaso en la implantación de un datawarehouse, existen muy poca literatura para descubrir las causas de éxito. Por último, aunque las técnicas estadísticas pueden ser también una herramienta muy potente para la Minería de Datos (sería la fase 3 del proceso KDD según la figura 1), este estudio no se va a aplicar en esa fase, sino en la fase 1 de construcción del datawarehouse.

La estructura del documento es la siguiente: la sección 1 refleja el estado del arte en esta materia, la sección 2 describe el modelo matemático de resolución del problema, la sección 3 describe las conclusiones y líneas futuras y la sección 4 presenta la bibliografía manejada.

1 Estado de la cuestión

Los sistemas de información deben estar integrados totalmente en el sistema empresarial [7]. Así, los sistemas de información son proclives a no dotar de un valor perdurable, sino más bien proporcionan soluciones a problemas concretos. El mercado de DW (datawarehouse) sigue en creciente demanda, de tal manera que cada vez más empresas deciden su implementación como se estima en [8]. Muchos proyectos DW terminan en fracaso, como se comenta en [9]. De hecho, existen estudios que reflejan que la tasa de DW que termina en éxito no sobrepasa el 15%. Las referencias publicadas de fracasos son escasas, así como el contenido de la información. La mayoría de los fracasos envuelven múltiples causas. Estos mismos autores definen fracaso como “la cancelación formal o informal del proyecto de DW o el abandono del proyecto por no alcanzar las necesidades del negocio”. Se puede analizar la implementación de un DW estudiando las causas para su éxito ó las causas que provocaron su fracaso. El presente estudio trata de abordar el problema analizando cuales fueron los factores que provocaron el éxito de un DW. Se eligió una empresa aseguradora con DW y se estudiaron los factores que provocaron el éxito en su implantación.

2 Modelo aplicado

Se va a abordar este apartado en las siguientes fases:

1) Planteamiento del problema según un modelo conceptual
2) Instrumento de muestreo
3) Análisis de los datos recopilados
4) Análisis de confiabilidad
5) Obtención de coeficientes de correlación y grado de significancia a través de SPSS
6) Resumen del rechazo o no de las hipótesis según los coeficientes calculados

2.1 Planteamiento del problema según un modelo conceptual

En este apartado se descubren las variables que intervienen en la construcción de un DW y cuales son las correlaciones que se quieren probar como “no rechazadas”. Existen en la literatura varios modelos teóricos relacionados con los factores de éxito implementación de un DW. Un factor de éxito es crítico cuando es necesario su cumplimiento para los objetivos de la organización. Los factores críticos de éxito (“critical success factors”) son aquellos factores que tienen que ocurrir para lograr el éxito [10]. El modelo elegido para este estudio es el que muestra la figura 2, adaptado de [11]:

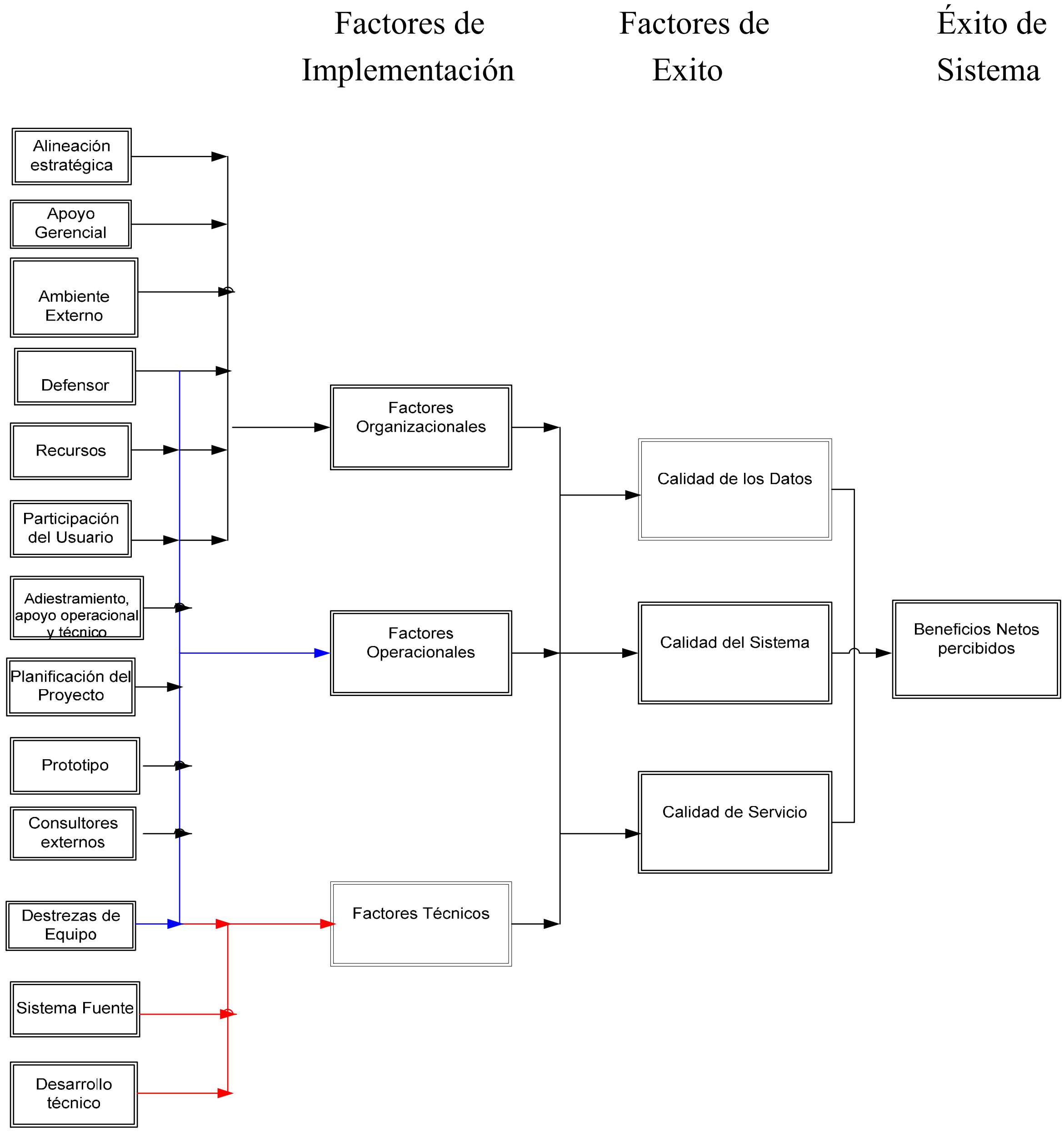


Figura 2. *Modelo de Investigación Propuesto por este Estudio*

Los factores de implementación se agrupan en: factores organizacionales, operacionales y técnicos. Los factores de éxito se dividen en: calidad del sistema, calidad de servicio y calidad de datos. Por último, se entiende que el éxito del sistema son los beneficios netos, ya que se está midiendo el éxito en términos económicos. En primer lugar, se va a realizar un análisis de los datos recopilados en el apartado siguiente a nivel de porcentajes y de representación de los resultados. En segundo lugar, se van a plantear posibles correlaciones entre grupos de factores (constructos) a distintos niveles, siendo las relaciones las marcadas por las fechas: los factores de implementación estan correlacionados con los factores de éxito y los factores de éxito estan correlacionados con el éxito del sistema. Por tanto, las variables a correlacionar son los constructos de los niveles mencionados. Como este estudio se ha realizado bajo la herramienta SPSS 15, se van a usar los cálculos que ofrece esta herramienta para las correlaciones bivariadas [12]. Por ello, las hipótesis nulas son las siguientes:

H1	Se asocia un nivel alto de calidad de datos con un nivel alto de beneficios netos percibidos.
H2	Se asocia un nivel alto de calidad del sistema con un nivel alto de beneficios netos percibidos.
H3	Se asocia un nivel alto de calidad de servicio con un nivel alto de beneficios netos percibidos.
H4	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores organizacionales con un nivel alto de calidad de datos.
H5	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores organizacionales con un nivel alto de calidad del sistema.
H6	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores organizacionales con un nivel alto de calidad de servicio.
H7	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores operacionales con un nivel alto de calidad de datos.
H8	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores operacionales con un nivel alto de calidad del sistema.
H9	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores operacionales con un nivel alto de calidad de servicios.
H10	Se asocia un nivel alto de éxito en la complejidad de factores técnicos con un nivel alto de calidad de datos.
H11	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores técnicos con un nivel alto de calidad del sistema.
H12	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores técnicos con un nivel alto de calidad de servicio.

Tabla 1. *Hipótesis nulas*

Para medir las correlaciones entre dichos grupos se van a obtener unos coeficientes de correlación. Existen unos rangos de valores de esos coeficientes para los cuales se declara que ha habido una fuerte ó una débil correlación, que se verán en el apartado 2.5. Los contrastes de hipótesis se aplicarán de la siguiente manera: tenemos sospechas de que el ambiente externo afecta a la calidad de los datos, pero si el coeficiente de correlación basado en las muestras indica lo contrario, podemos rechazar esta hipótesis.

SPSS ya tiene valores tipificados para realizar los cálculos de los coeficientes de correlación y grados de significancia.

2.2 Instrumento de muestreo

Para medir la intensidad de las variables que aparecen en el nivel más detallado en el modelo anterior (Prototipo,...), se han creado dos versiones de cuestionario, A y B. La primera versión del cuestionario (tipo A, versión larga), se preparó para la muestra de sujetos compuesto por patrocinadores, líderes de proyecto, analista de negocios y desarrolladores. Esta versión del cuestionario incluye 50 ítems agrupados en veinte categorías. La segunda versión del cuestionario, identificado como tipo B (versión corta), se preparó para la muestra de sujetos compuesta por los usuarios de negocio. Esta segunda versión del cuestionario incluye 29 ítems agrupados en once categorías y no aparecen ítems de las categorías: recursos, participación del usuario, planificación del proyecto, consultores externos, destrezas de equipo, desarrollo tecnológico, éxito de la implementación con temas organizacionales, éxito de la implementación con temas del proyecto, éxito de la implementación con temas técnicos. Las respuestas pertenecen a un sistema de puntuación de 1 a 7, que corresponden a:

1 - muy de acuerdo
2 - de acuerdo
3 - indeciso
4 - en desacuerdo
5 - muy en desacuerdo
6 - no sé
7 - no aplicable

El cuadro 2 muestra los ítems del cuestionario B y las posibles respuestas. Se diferencia del cuestionario A en que no aparecen ítems de los factores desconocidos para los usuarios, que es a quienes va dirigido el cuestionario:

4	La Alineación estratégica asegura el acoplamiento de las necesidades del negocio y los planes de TI.	1	2	3	4	5	6	7
5	El análisis de ROI es una herramienta útil y efectiva para la toma de decisiones que ayuda a alinear las estrategias y los recursos organizacionales.	1	2	3	4	5	6	7
6	En general, la gerencia ha animado la implantación y el uso de DW.	1	2	3	4	5	6	7
7	La satisfacción del usuario ha sido una preocupación importante de la gerencia.	1	2	3	4	5	6	7
8	Comprensión del ambiente externo.	1	2	3	4	5	6	7
9	Un defensor de alto nivel del DW vino de un área funcional.	1	2	3	4	5	6	7
10	Un defensor de alto nivel del DW vino de TI.	1	2	3	4	5	6	7
11	Se dieron los adiestramientos necesarios para el DW.	1	2	3	4	5	6	7
12	Se implementó una infraestructura de apoyo para los usuarios del DW.	1	2	3	4	5	6	7
13	Desde sus inicios se definió el alcance del proyecto.	1	2	3	4	5	6	7
14	Un prototipo fue utilizado para probar el concepto del DW.	1	2	3	4	5	6	7
15	Definiciones comunes para los datos clave fueron implementados a través de los sistemas fuente.	1	2	3	4	5	6	7
16	Los datos fuente utilizados para el DW fueron sistemas de aplicaciones diversas.	1	2	3	4	5	6	7
17	Un número significativo de sistemas fuente tuvieron que ser modificados para proporcionar los datos para DW.	1	2	3	4	5	6	7
18	Los usuarios (aplicaciones) tienen datos más exactos ahora en el DW que los que tenían de sistemas fuente (Ej., sistemas de transacción).	1	2	3	4	5	6	7
19	DW proporciona datos más comprensivos a los usuarios (o aplicaciones) que los proporcionados por los sistemas fuente.	1	2	3	4	5	6	7
20	DW proporciona datos más correctos a los usuarios (o aplicaciones) con respecto a los sistemas fuente.	1	2	3	4	5	6	7
21	DW ha mejorado la consistencia de datos a los usuarios (o aplicaciones) con respecto a los sistemas fuente.	1	2	3	4	5	6	7
22	DW puede ajustarse de forma flexible a las nuevas demandas o condiciones.	1	2	3	4	5	6	7
23	DW es versátil para lograr satisfacer las necesidades de los datos de los usuarios.	1	2	3	4	5	6	7
24	DW integra con eficacia datos de una variedad de fuente de datos dentro de la organización.	1	2	3	4	5	6	7
25	El DW aumentó la satisfacción del cliente.	1	2	3	4	5	6	7
26	El DW aumentó la cantidad de clientes.	1	2	3	4	5	6	7
27	DW ha cambiado mi trabajo significativamente.	1	2	3	4	5	6	7
28	DW ha reducido a la comunidad de usuarios el tiempo que lleva el apoyo a la toma de decisiones.	1	2	3	4	5	6	7
29	DW ha reducido a la comunidad de usuarios el esfuerzo que lleva el apoyo a la toma de decisiones.	1	2	3	4	5	6	7

Tabla 2. *Resumen del cuestionario tipo B*

2.3 Análisis de los datos recopilados

El número total de cuestionarios contestados y recibidos fue 31. Se recibieron 2 cuestionarios de la primera versión (tipo A). Se recibieron 29 cuestionarios de la segunda versión del cuestionario (tipo B). La tasa de respuestas global (de los dos cuestionarios) fue de un 28%.

Se utilizó la estadística descriptiva para la población de los usuarios de negocio con el propósito de describir la distribución de los factores organizacionales, operacionales y técnicos. No se utilizó dicha estadística para la población de patrocinadores, líderes de proyecto, analista de negocios y desarrolladores debido al número de la muestra obtenida (sólo se recibieron 2 cuestionarios tipo A).

Se calculó la tasa del promedio para cada uno de los ítems del constructo de la muestra obtenida para la población de usuarios de negocio. Luego se calculó el promedio por constructo para obtener la distribución de los factores organizacionales, operacionales y técnicos. Las columnas 6 y 7 (No aplicable y No sé) de la escala utilizada en ambas versiones del cuestionario, alteran el valor del promedio. Por tal razón no se consideraron para determinar el promedio de los factores organizacionales, operacionales y técnicos ya que el promedio es sensible a los extremos[13].

Los factores organizacionales agrupan las variables: alineación estratégica, apoyo gerencial, ambiente y defensor. El Gráfico 3 presenta la variable apoyo gerencial con la tasa más alta entre los factores organizacionales.

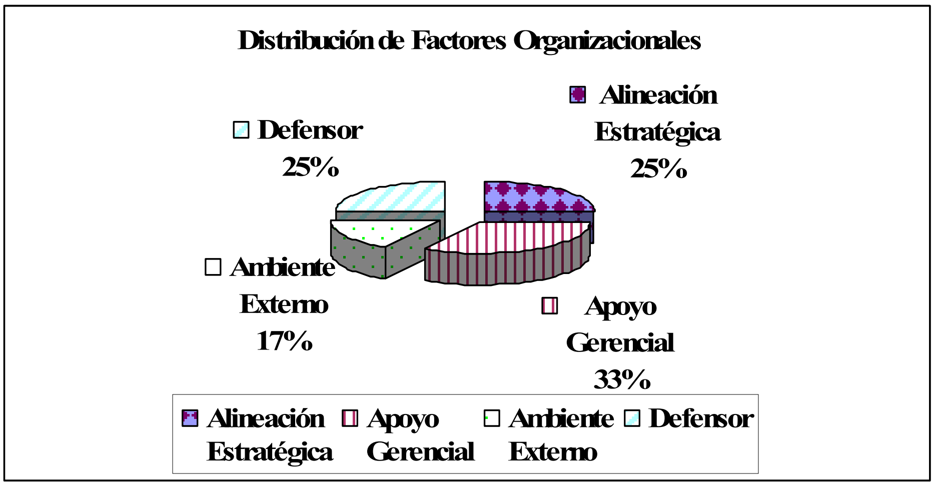


Figura 3. *Distribución de los Factores Organizacionales. Microsoft Excel v. 2003*

Alineación estratégica y defensor obtuvieron el mismo porcentaje, un 25%. Ambiente externo obtuvo un 17%. La tasa más baja entre los factores organizacionales.

Los factores operacionales se componen de dos variables: adiestramiento, apoyo operacional y técnico y prototipo. Observamos en la Gráfico 4 las variables adiestramiento, apoyo operacional y técnico con una participación de 2/3 de los factores operacionales. Prototipo obtuvo un 33%.

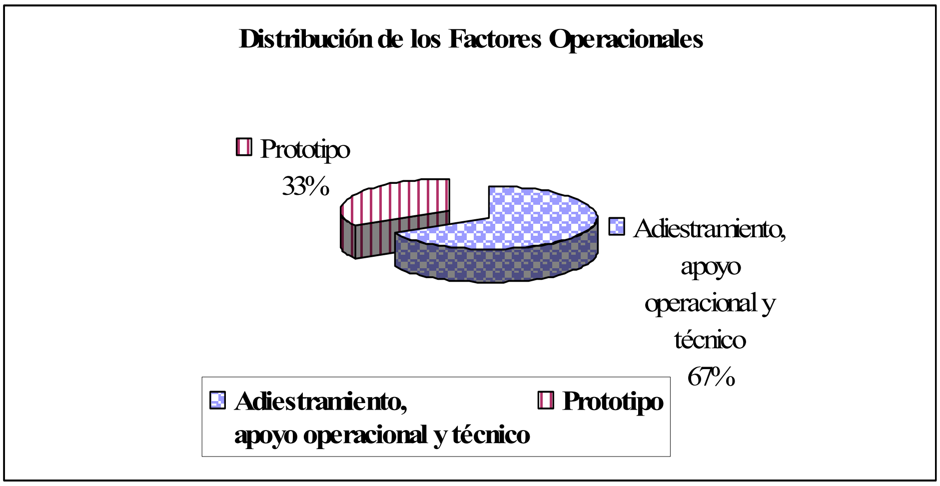


Figura 4. *Distribución de los Factores Operacionales. Microsoft Excel v. 2003*

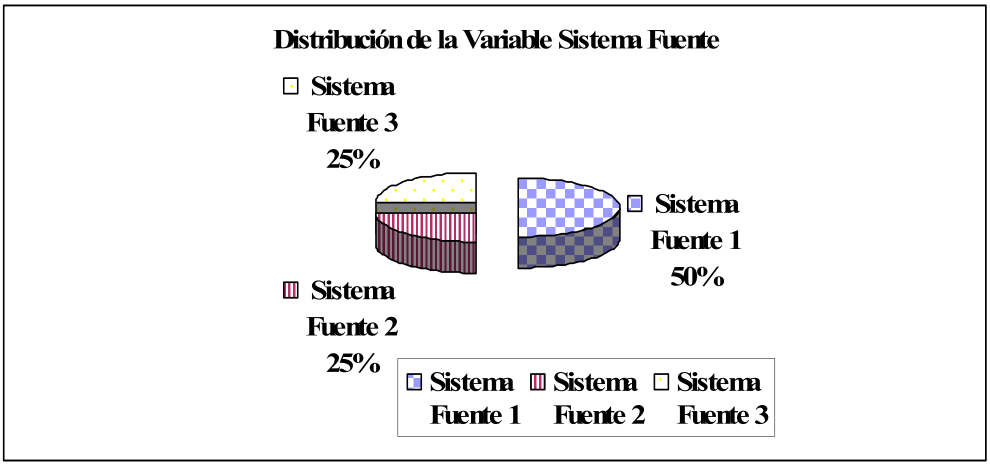


Figura 5. *Distribución de los Factores Técnicos. Microsoft Excel v. 2003*

Los factores técnicos de la versión del cuestionario (tipo B), sólo contienen una variable, Sistema Fuente. La gráfico 5 nos presenta la distribución de la variable Sistema Fuente. Podemos observar sistema fuente 1 obtuvo una tasa de participación de un 50%, dejando con un 25% de participación a los ítems sistema fuente 2 y sistema fuente 3.

2.4 Análisis de confiabilidad

Se recogió evidencia de confiabilidad de la segunda versión del cuestionario (tipo B) mediante el cálculo del coeficiente alfa de Cronbach (∝), método para estimar la consistencia interna del cuestionario, [14]. El coeficiente alfa puede ser calculado mediante valores crudos o valores estandarizados. El cálculo de ambos coeficientes sirve más para propósitos de comparación que para cualquier otro propósito. N es el número de variables independientes que se tomaron en consideración para estimar el coeficiente alfa.

El cálculo del coeficiente alfa fue de .0714 (ver tabla 3). Este coeficiente de confiabilidad es considerado alto. En [15], se sugiere para los tipos de investigación exploratorios, los niveles del coeficiente alfa mayores de 0.7 son considerados altos. El resultado obtenido sirve como evidencia que abona a la confiabilidad del cuestionario.

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Basado en Ítems Estandarizados	N
.714	.718	7

Tabla 3. *Análisis de Confiabilidad de la Prueba*

A partir de aquí se realiza el cálculo y análisis de los datos, para ver las posibles relaciones entre variables, para lo cual se utilizaron como herramientas la versión 15 del programa de SPSS para Windows y el programa de aplicación, Microsoft Office Excel 2003.

2.5 Obtención de coeficientes de correlación y niveles de significancia con SPSS

Puesto que la mayor parte del estudio consiste en determinar relaciones entre variables categóricas ordinales, se presentan las siguientes alternativas:

1) Utilizar el clásico test Chi-cuadrado para determinar relaciones entre variables categóricas. Este es un test que no tiene en cuenta el orden de las categorías, con lo cual se desaprovecharía esa información. Por contra es uno de los test más comunes.

2) Utilizar tests específicos para determinar relaciones entre variables categóricas ordinales. SPSS incorpora dos test (aunque hay más):
   - Test de Spearman [16]
   - Test Tau de Kendall [17]

Estos dos coeficientes son una alternativa al de Pearson cuando las variables son ordinales y/o incumplen el supuesto de normalidad.

3) Utilizar el clásico test de correlación de Pearson para variables cuantitativas.

Observando el cuestionario, la mayoría de las variables categóricas presentan las categorías:

1- muy de acuerdo
2- de acuerdo
3- indeciso
4- en desacuerdo
5- muy en desacuerdo

Suponiendo que la distancia entre estas categorías sea la misma, se les puede asociar un valor numérico que puede ser el propio que aparece en el cuestionario y entonces se podría aplicar el test de Pearson. Este test se debe aplicar para distribuciones normales. Según [18] las muestras cuyo número de datos es mayor de 29 se pueden considerar casi normales, lo cual es el caso de esta muestra.

En consecuencia, se ha elegido el coeficiente de correlación de Pearson~~.~~ Para interpretar el nivel de asociación entre dos variables se utiliza el tamaño del coeficiente de correlación teniendo en consideración los criterios establecidos por [13]:

Tamaño de la Correlación	**Interpretación**
.90 a 1.00 (-.90 a – 1.00)	Correlación bien alta positiva (negativa)
.70 a .90 (-.70 a -.90)	Correlación alta positiva (negativa)
.50 a .70 (-.50 a -.70)	Correlación moderada positiva (negativa)
.30 a .50 (-.30 a -.50)	Correlación baja positiva (negativa)
.00 a .30 (.00 a -.30)	Si existe correlación, es pequeña

Tabla 4. *Reglas para Interpretar el Tamaño del Coeficiente de Correlación*

SPSS ha obtenido resultados de este tipo, con tantas matrices cuadradas como relaciones entre variables queremos estudiar:

Correlations

		Factor organizacional	Calidad de datos
Factor organizacional	Pearson Correlation	1	.460*
	Sig. (2-tailed)		.018
	N	26	26
Calidad de datos	Pearson Correlation	.460*	1
	Sig. (2-tailed)	.018	
	N	26	27

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Tabla 5. *Resultado de la obtención del coeficiente Pearson por SPSS*

donde cada cruce en la fila de Pearson correlation indica el valor del coeficiente de correlación de Pearson; en la fila Sig. (2-tailed) indica el valor p, para este caso es significativa a nivel 0.05. Si el valor p es menor que el establecido (0.05) la correlación es significativa. En este caso no se rechaza la hipótesis de que las variables Factor Organizacional y Calidad de datos estan correlacionadas. Por último, N es el número de casos sobre el cual el coeficiente ha sido calculado.

2.6 Resumen del rechazo o no de las hipótesis según los coeficientes calculados

Como se muestra en la tabla 6, la mayor parte de los valores obtenidos son bajos, según la escala establecida por [13], en la cual debe estar con valores iguales ó superiores al .7. Sin embargo, teniendo en cuenta la literatura existente, no se tiene evidencia de coeficientes mayores que los obtenidos para las hipótesis H4, H5, H7 y H8. Por consiguiente, estos coeficientes no indican que la asociación entre las variables mencionadas en las anteriores hipótesis es baja (por estar cercanos al .5). En estos casos no se rechazan dichas hipótesis. El resto de las hipótesis se rechazan con la muestra obtenida:

Hipótesis		Correlación Pearson	Resultado
H1	Se asocia un nivel alto de calidad de datos con un nivel alto de beneficios netos percibidos.	.368	Rechazada
H2	Se asocia un nivel alto de calidad del sistema con un nivel alto de beneficios netos percibidos.	.303	Rechazada
H3	Se asocia un nivel alto de calidad de servicio con un nivel alto de beneficios netos percibidos.	.219	Rechazada
H4	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores organizacionales con un nivel alto de calidad de datos.	.460*	No se rechaza
H5	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores organizacionales con un nivel alto de calidad del sistema.	.459*	No se rechaza
H6	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores organizacionales con un nivel alto de calidad de servicio.	.043	Rechazada
H7	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores operacionales con un nivel alto de calidad de datos.	.539**	No se rechaza
H8	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores operacionales con un nivel alto de calidad del sistema.	.471*	No se rechaza
H9	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores operacionales con un nivel alto de calidad de servicios.	.257	Rechazada
H10	Se asocia un nivel alto de éxito en la complejidad de factores técnicos con un nivel alto de calidad de datos.	.316	Rechazada
H11	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores técnicos con un nivel alto de calidad del sistema.	-.017	Rechazada
H12	Se asocia un nivel alto de éxito en la implementación de factores técnicos con un nivel alto de calidad de servicio.	.264	Rechazada

Tabla 6. *Resultados del contrate de hipótesis*

3 Conclusiones y líneas futuras

El presente estudio ha intentado reflejar la correlación entre los factores que intervienen en la implementación de un datawarehouse. Se ha probado que los tamaños pequeños de muestra no suelen servir para demostrar correlaciones que a-priori parecen ciertas. Debido a las restricciones administrativas que imponen muchas empresas y a la falta de facilidades que muestran los encuestados, es difícil encontrar tamaños de muestra fiables. Sin embargo, algunos factores sí parecen estar relacionados, así que este estudio supone un punto de partida para aplicar los cuestionarios en otras empresas del mismo tipo y así obtener más correlaciones. Se propone pasar los tests para los otros coeficientes para descubrir niveles más altos en los coeficientes de correlación. Con el conjunto de estos resultados se pueden obtener indicios más claros de los factores que hay que mejorar para obtener un datawarehouse exitoso en la organización. Por último, también se propone hacer estudios de correlaciones parciales, para detectar las relaciones netas que hay entre variables, si es que hay una tercera variable que influye en las anteriores.

4 Bibliografía

[1] Cuesta, D., Valera F.M., Entrecanales, R.,Valenzuela, J. (2006)[en linea]: Misión Posible: Investigación Conjunta entre Ingenieros y Médicos. Ejemplo de Aplicación Específica para la Monitorización de Temperatura Corporal. En *RevistaeSalud.com*, Vol 2, No 6.
[http://www.revistaesalud.com/index.php/revistaesalud]

[2] Ramos, R. (1999) [en linea]: *Análisis de los efectos económicos de la Unión Económica y Monetaria: el papel de los shocks asimétricos*. Universitat de Barcelona. [http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UB/AVAILABLE/TDX-0717102-122325/].

[3] Inmon, W.H. (1992): EIS and the datawarehouse: A simple approach to building an effective foundation for EIS, *Database Programming and Design*, vol. 5, num. 11:pp.70-73.

[4] Inmon, W.H. (2002): *Building the datawarehouse*, 3rd edition, Wiley, Chichester.

[5] Hernandez, J., Ramirez, J.M., Ferri, C. (2004*): Introducción a la Minería de Datos*, Pearson-Prentice Hall, Madrid.

[6] Simoudis, E. (1996): Reality check for data mining. *IEEE Expert: Intelligent Systems and Their Applications*, Vol. 11, No. 5, October, pp. 26-33.

[7] Luftman, J.N. (2001): *La Competencia en la era de la Información: La alineación estratégica en la práctica*, México: Oxford University Press, S.A.

[8] Fox (2000): Data Warehousing: Avoiding the Pitfalls, *Behavioural health management*, vol. 20, núm. 3, pp. 14-18.

[9] Watson, H.J., Gerard, J.G., Gonzalez, L.E., Haywood, M.E., y Fenton, D. (1999). Data Warehousing Failures: Case Studies and Findings, *Journal of Data Warehousing*, vol. 4, núm. 2, pp. 44-55.

[10] Vatanasombut, B., Gray, P. (1999): Factors for Success in Data Warehousing: What the Literature Tell Us, *Journal of Data Warehousing*, vol. 4, No. 3, otoño, pp. 25-33.

[11] Wixom, B.H., Watson, H.J. (2001): An empirical investigation of the factors affecting data warehousing success, *MIS quarterly*, vol. 25, núm. 1, marzo, pp. 17-41.

[12] Pardo, A., Ruiz, M. Á. (2002): *Spss11. Guía para el análisis de datos*, Editorial McGraw-Hill.

[13] Hinkle, D.E., Wiersma, W., Jurs, S.G. (2003): *Applied Statistics for the Behavioral Sciences*, quinta edición, Houghton Mifflin Company, USA.

[14] Crocker, L, Algina, J. (2006): *Introduction to Classical and Modern Theory*, Thompson/Learning Wadsworth, USA.

[15] Nunnally, J.C. (1987): *Teoría Psicométrica*. Mc Graw-Hill, Inc., Mexico.

[16] Spearman, C. (1904)[en linea]: The proof and measurement of association between two things, *American Journal of Psychology,* 15, 72-101.
[http://en.wikipedia.org/wiki/Spearman%27s_rank_correlation_coefficient].

[17] Kendall, M. G. and Babington, B. (1938):Randomness and Random Sampling Numbers, *Journal of the Royal Statistical Society*, 101:1, 147-166.

[18] Peña, D. (2001): *Fundamentos de Estadística*. Alianza Editorial. Madrid.

Unas reflexiones sobre el reconocimiento de rutas en mapas ferroviarios y la teoría de grafos

E. Roanes Lozano[a], Angélica Martínez Zarzuelo[b], Alberto García Álvarez[c], E. Roanes Macías[a]

[a] Sección Departamental de Algebra, Facultad de Educación,
Universidad Complutense de Madrid
`{eroanes,roanes}@mat.ucm.es`

[b] Subdirección de Gestión de Espacio, Dirección Gestión de Ingresos, Dirección Comercial, Iberia
`amzarzu@hotmail.com`

[c] Fundación de los Ferrocarriles Españoles
`albertogarcia@ffe.es`

Abstract

The authors are working on the development of a computer package that can automatically generate an accurate railway map of a certain network at any (past) date requested by the user, which could be very useful for geographers, historians and engineers. It uses as input: a set of historical events, the graph of the railway network at its maximum extension and a list of geographical coordinates of stations, junctions, loading bays... (that are the nodes of the graph). During the development of this package they have faced the mathematical problem of recognizing (and precisely describing) a certain transportation route within a complex transportation network (graph). This latter problem is treated here. Only the use of elementary graph theory is required.

1. Introducción

Los autores están trabajando en el desarrollo de un paquete computacional que pueda generar automáticamente un mapa preciso de una red ferroviaria en cualquier fecha (pasada) dada por el usuario, lo que podría ser muy útil para historiadores, geógrafos e ingenieros, al poder mostrarse gráficamente la evolución de una red ferroviaria [5,6,2]. Usa como entradas:

- una serie de hitos históricos fechados, correspondientes a líneas completas o partes de líneas (inauguraciones, duplicaciones, electrificaciones, cierres al tráfico de viajeros…),
- el grafo [1,3] de los tramos que han sido construidos o, al menos, han estado en construcción en algún instante,
- una lista de coordenadas geográficas de estaciones (nodos del grafo).

El primer bloque de información ha sido proporcionado por el tercer autor, que mantiene la que es posiblemente la más detallada base de datos al respecto sobre la red española de ancho ibérico (Figura 1).

104	**Córdoba a Almorchón**						
105	Apertura (VUS)	1868	4	1	Almorchón a Bélmez (MZA)	Almorchón (0,440 Alm. a Bél.)	Bélmez (64,054 Alm. A Bél. =70,671 Cór. a Bél.)
106	Apertura (VUS)	1870	11	28	Córdoba a Bélmez (Andaluces)	Alhondiguilla (43,195 Cór. a Bél.)	Bélmez (70,671 Cór. a Bél.=64,054 Alm. A Bél.)
107	Apertura (VUS)	1873	7	11	Córdoba a Bélmez (Andaluces)	Obejo (22,343 Cór. A Bél.)	Alhondiguilla (43,195 Cór. a Bél.)
108	Apertura (VUS)	1873	9	5	Córdoba a Bélmez (Andaluces)	Córdoba Cercadilla (0,000 Cór. a Bél.)	Obejo (22,343 Cór. A Bél.)

Figura 1: *Algunas de las cientos de líneas del fichero de hitos históricos correspondientes a la red ferroviaria española de ancho ibérico.*

El segundo bloque de información ha sido proporcionado también por la Fundación de los Ferrocarriles Españoles (Figura 2).

5	00004	EL PORVENIR	04	298.262,84	4.243.891,90	03	Apeadero-Cargadero
6	00005	PEÑARROYA-PUEBLONUEVO	01	301.250,83	4.240.824,02	04	Cargadero
7	00006	BELMEZ	05	306.930,94	4.237.509,36	05	Cerrado en línea abierta
8	00007	VILLANUEVA DEL REY	01	314.343,65	4.233.604,51	06	Cerrado en línea cerrada
9	00008	ESPIEL	00	320.825,83	4.227.605,63	07	Estación
10	00010	ALHONDIGUILLA-VILLAVICIOSA	07	322.961,49	4.225.312,27	10	Bifurcación
11	00012	EL PARRALEJO	04	330.592,61	4.220.404,73	11	Bifurcación cerrada en línea abierta
12	00013	EL VACAR-VILLAHARTA	01	337.105,21	4.216.833,10	12	Bifurcación cerrada en línea cerrada

Figura 2: *Algunas de las líneas del fichero de coordenadas de estaciones, cargaderos, apeaderos, bifurcaciones… de la red ferroviaria española de ancho ibérico.*

El tercer bloque (`CA`) ha sido obtenido a partir de mapas de la red de distintas épocas [4,9-12][1] y es un conjunto de conjuntos de dos elementos, cada uno de los cuales representa a una arista (Figura 3).

---

[1] En la www se pueden encontrar mapas menos detallados de la red española como [13].

```
CA:={ {Frontera_Elvas,Badajoz_Frontera},
      {Badajoz_Frontera,Badajoz},
      {Badajoz,Talavera_la_Real},
      {Talavera_la_Real,La_Vara},
      {La_Vara,Guadiana_del_Caudillo},
      {Guadiana_del_Caudillo,Montijo},
      {Montijo,Torremayor},
      {Torremayor,Garrovilla},...}
```

Figura 3: *Algunas de las aristas del grafo correspondiente a la red ferroviaria española de ancho ibérico.*

El problema es que los hitos afectan por lo general a partes de línea, por ejemplo Obejo - Alhondiguilla (línea 107 del archivo parcialmente mostrado en la Figura 1), cuyos extremos no suelen ser estaciones adyacentes. Consecuentemente el hito recogido afecta a varias aristas del grafo. Comentaremos en este artículo las dificultades que se presentan al tratar de automatizar la determinación de las aristas del grafo afectadas por un hito histórico.

2. Sobre el reconocimiento "de visu" de rutas en redes ferroviarias

En la mayor parte de las actividades humanas la información contextual forma parte (consciente o inconscientemente) de la información procesada por el sujeto.

En el caso que nos ocupa (reconocimiento de líneas o rutas en una red de transporte compleja) se utilizan diversas técnicas.

Por ejemplo, en metros y suburbanos (y también en redes de tranvías y de cercanías), donde las líneas suelen funcionar como explotaciones independientes, invirtiendo los convoyes continuamente el sentido en las estaciones finales o recorriendo incansablemente líneas circulares, se suelen distinguir unas líneas de otras utilizando distintos colores para cada línea. La representación no corresponde a criterios geográficos (como una proyección conforme o isométrica), sino que las líneas de la red se esquematizan priorizando que se distingan con claridad, aunque sea en detrimento de su ajuste a la realidad geográfica. Parece que este tipo de representación fue inventada por Harry Beck para el mapa del metro de Londres de 1933 [14].

En ocasiones en que hay más de una ruta, se añade una información geográfica extra, por ejemplo su situación al este o al oeste de un país. Así, hay históricamente dos grandes líneas de ferrocarril, construidas a mediados del siglo XIX, que compiten por los viajeros del trayecto Londres – Edimburgo: la East Coast

Main Line (ECML) y la West Coast Main Line (WCML). La primera línea, discurre por Leeds y Newcastle, con un trazado suave [16] y la segunda por Birmingham y Manchester [17].

En otros casos en que también hay más de una posibilidad razonable para realizar un trayecto en tren, se opta por añadir una estación intermedia. Por ejemplo, en la red de Renfe previa al comienzo de la alta velocidad, todos los trenes Madrid - Badajoz aclaraban si eran "vía Cáceres" o "vía Ciudad Real" (Figura 4). La primera de ellas aprovecha parte de la red de la antigua compañía MCP (Madrid Cáceres Portugal) y la segunda es el acceso a Badajoz original de la antigua compañía Madrid Zaragoza Alicante (MZA)[2]. El que este segundo trayecto era por Algodor y no por Aranjuez y Manzanares se suponía conocido.

Algo similar ocurría, por ejemplo, en los tiempos inicales de Renfe entre Córdoba y Sevilla, donde el acceso a Sevilla por Marchena y Utrera (heredado de la Compañía de Andaluces) competía todavía con el acceso de MZA por Los Rosales (Figura 4)[3].

Pero esto no es conveniente normalmente en las redes ferroviarias, donde multitud de rutas utilizan un mismo tronco común (por ejemplo, antes de la construcción del acceso ferroviario en alta velocidad a Andalucía –AVE–, gran parte del recorrido desde Madrid (hasta Linares) era común para los convoyes con destino a cualquier ciudad andaluza (Figura 4).

También se puede distinguir una ruta por las características de la línea. Así por ejemplo, desde Madrid se puede acceder por ferrocarril a Córdoba (Figura 5) por la línea de alta velocidad (o de ancho internacional) y por la línea estándar (de ancho ibérico)[4].

---

[2] Gran parte de la línea Madrid - Ciudad Real original (excepto la parte inicial usada para el servicio de cercanías de Madrid) fue levantada cuando se construyó el acceso ferroviario en alta velocidad (AVE) a Andalucía. Los trenes de Madrid a Badajoz por Ciudad Real llegan actualmente a Ciudad Real por Manzanares (esto es, utilizando la línea de Andalucía de ancho ibérico).

[3] Nótese que en Carmona hay dos estaciones aisladas.

[4] Anteriormente se podía acceder también por la línea de Extremadura (Madrid – Ciudad Real – Almorchón) y tomando luego la Almorchón – Cordoba, pero esta última quedó cortada en las proximidades de Córdoba por la línea del AVE.

Figura 4: *Red ferroviaria del sur español en 1941*
(Fuente: Fundación de los Ferrocarriles Españoles).

Por lo general hay gran diferencia entre el tiempo que requiere un usuario experto en un mapa de una red ferroviaria compleja y el de alguien que no la domina para reconocer, por ejemplo, el itinerario más corto o la línea principal.

3. Indecidibilidad del reconocimiento de rutas sin información contextual o extra

En un ejemplo sin ciclos como el de la línea Badajoz – Mérida (Figura 5), no hay alternativas posibles que no pasen dos veces por una misma estación. Pero, por lo general, las líneas de las redes ferroviarias suelen contener aristas de distintos ciclos [7,8] (en Europa una de las pocas excepciones es Portugal, con muy pocos ciclos en su red, formada históricamente por muchas “antenas”).

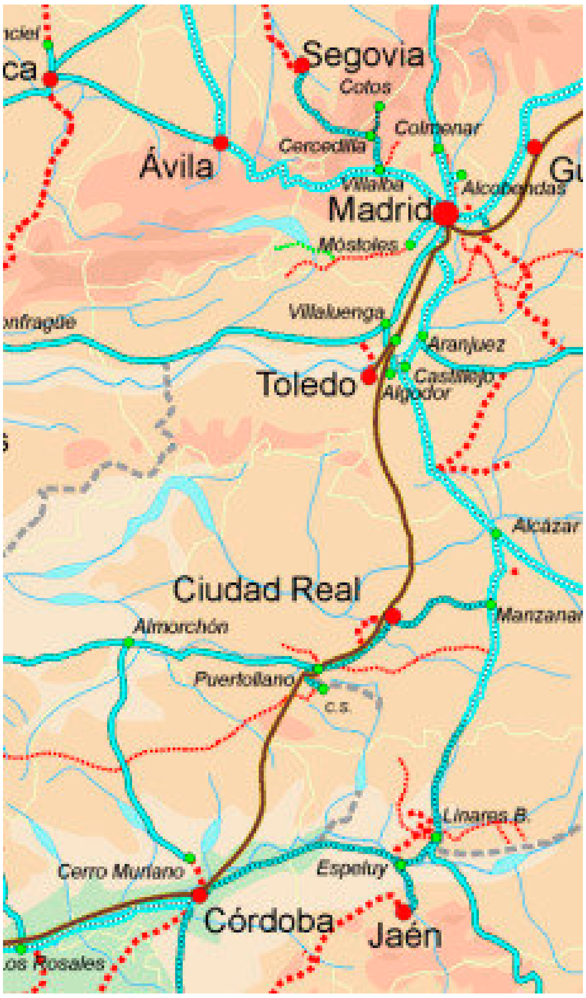


Figura 5: *Red ferroviaria española entre Madrid y Córdoba en 2006 (Fuente: Fundación de los Ferrocarriles Españoles).*

Consideremos el caso del la red ferroviaria ideal, de características técnicas homogéneas, de la Figura 6. Supongamos que los puntos marcados representan las únicas estaciones existentes y que los puntos V y W son diametralmente opuestos. En tal caso no podemos preferir objetivamente una de las dos rutas de A a B, A-F-W-G-B o A-F-V-G-B, usando un criterio tradicional (como minimizar el número de nodos intermedios, minimizar la distancia, minimizar el tiempo...) pues no habría un mínimo sino dos minimales (para cada criterio).

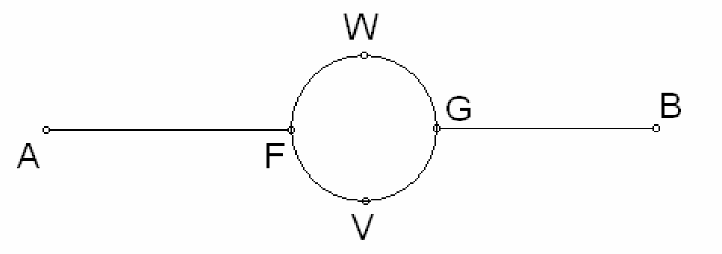


Figura 6: *Un ejemplo en que no hay una ruta mínima, sino dos minimales.*

4. Necesidad de introducir nuevos nodos "imaginarios" para automatizar el reconocimiento de rutas

Una variante mejora un trazado o se realiza por causa de fuerza mayor (por ejemplo, la antigua estación de Rio Tajo, en la línea de Cáceres a Plasencia, yace bajo las aguas de un embalse).

Consideremos la línea férrea y la variante de nueva construcción (en trazado grueso) de la Figura 7.

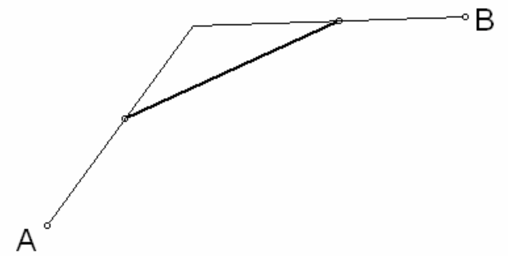


Figura 7: *Una línea en que se construye una variante.*

Para poder construir automáticamente un mapa de cada momento histórico, el sistema debe poder determinar con precisión cual es cada una de las dos rutas posibles (antigua/moderna) a partir del grafo. Pero bastaría para ello incluir dos nuevos nodos "imaginarios" (en el sentido de que no corresponden con estación o similar) en los puntos en que se separan los trazados nuevo y antiguo (BI1 y BI2 en la Figura 8), así como un nuevo nodo imaginario en cada uno de los trazados (NI1 y NI2 en la Figura 8).

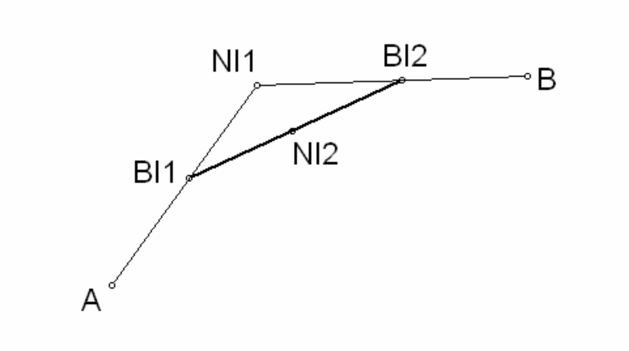


Figura 8: *Distinguiendo la antigua línea de la variante.*

Así, podríamos describir la línea de A a B antes de la construcción de la variante como la concatenación de los caminos mínimos de A a NI1 y de NI1 a B en el grafo, mientras que la línea de A a B después de la construcción de la variante sería la concatenación de los caminos mínimos de A a NI2 y de NI2 a B.

Notemos que, aunque este proceso de adjuntar información extra al grafo sería manual, habría que hacerlo sólo una vez, utilizándose esta información para la creación automática del mapa en cualquier fecha.

Esta misma solución planteada para las variantes se puede aplicar a los bypasses.

En el caso particular de la variante de la estación de Rio Tajo mencionada más arriba, se presenta el problema añadido de que tanto la antigua estación como la moderna se denominan “Rio Tajo”. Hemos optado en denominarlas “Rio Tajo 1” y “Rio Tajo 2” (respectivamente) y alterar todo lo que las afecta manualmente.

5. Solución adoptada

En nuestra aproximación al problema de generar automáticamente mapas de cualquier fecha pasada, hemos pensado, como ya hemos dicho, almacenar en un grafo (como aristas), todos los tramos de líneas de ferrocarril existentes en la actualidad, o que alguna vez han existido o que, al menos, han estado en obras alguna vez. Los nodos del grafo serán pues todas las estaciones, apeaderos, cargaderos, bifurcaciones... que alguna vez han existido o que, al menos, se han situado en líneas en obras alguna vez .

Se ha decidido desarrollar la primera versión “beta” del sistema sobre un sistema de cómputo algebraico (CAS), con lo que se tiene disponible un cómodo lenguaje de programación, la posibilidad de realizar operaciones con listas y conjuntos, y potentes comandos sobre representación gráfica de funciones.

El paquete se divide en dos grandes bloques.

- un primer bloque corresponde al código que lleva a cabo los procesos
- el segundo bloque incluye la información de la red ferroviaria.

Tratamos de que el proceso sea tan automático como sea posible, pero, como ya hemos comentado más arriba, el problema de reconocer una parte de una línea dados sólo sus extremos puede ser indecidible sea cual sea el criterio elegido.

Por ello, en la fase de diseño del paquete (o cuando un usuario experto decide implementar una nueva red ferroviaria, con lo que tiene que construir un nuevo segundo bloque), es necesario incluir una fase manual de depuración de datos en la que se expliciten manualmente las situaciones conflictivas. Este proceso se puede hacer a la vista del propio mapa que el paquete puede generar de la red completa, antes de que se realice ninguna inauguración (como el de la Figura 9, pero sin colorear según la vía sea única/doble, electrificada/no electrificada, esté abierta a todo tipo de tráfico/sólo a tráfico de mercancías/cerrada/vía verde...). Es de destacar que este proceso manual se lleva a cabo una única vez y será aprovechado al generar el mapa en cualquier fecha que el usuario elija.

Aceptando estos condicionantes, la estrategia adoptada ha sido que el paquete busque los tramos a que afecta el hito histórico utilizando un algoritmo de caminos mínimos en el número de nodos intermedios (Dijsktra)

6. Situación actual y futuro desarrollo

Como se ha visto en la sección anterior, una primera versión "beta" del paquete es capaz de generar mapas si se le dan perfectamente depurados los tres archivos mencionados más arriba. Esto se ha hecho ya con la red de ancho ibérico de la Comunidad Autónoma de Extremadura (Figura 9). Esencialmente, está pendiente:

- depurar los datos correspondientes al resto de la red ferroviaria española,
- portar el paquete a un sistema de cómputo algebraico de software libre como Maxima [18], de modo que los mapas puedan ser generados y utilizados libremente por cualquier miembro de la comunidad científica, así como que se puedan añadir a este formato los de otras redes,

- mejorar algunos detalles del paquete, como admitir el cambio de nombre de algunas estaciones a lo largo de la historia (por ejemplo, la estación de Monfragüe se denominó previamente Plasencia Empalme y antes Palazuelo),
- tratar de automatizar la depuración de datos, de forma que el sistema pregunte solamente cuando la existencia de un ciclo le hace dudar entre dos caminos de longitud similar (en número de nodos).

Figura 9: *Mapa de la red ferroviaria en Extremadura dibujado automáticamente.*

7. Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente subvencionado por la *Dirección General de Telecomunicaciones y Sociedad de la Información* [19] de la *Junta de Extremadura* y la *Fundación de los Ferrocarriles Españoles* [20].

8. Conclusiones

Generalmente aislamos las explicaciones de las clases de matemáticas del mundo real, sin conectar los problemas y ejemplos con las aplicaciones. Pero existen multitud de ejemplos atractivos que pueden ser tomados del mundo real.

Por ejemplo, ajustar una reacción química puede ser el motivo para introducir los sistemas (lineales) diofánticos. O plantear la expresión algebraica que expresa los gastos que acumula el uso de un automóvil, en función de varios parámetros, puede justificar la necesidad de tratar ecuaciones algebraicas no lineales.

Cuando se trata de formalizar un problema para su informatización suele ocurrir que la matematización previa del problema hace aflorar problemas matemáticos que habían pasado previamente inadvertidos. En este caso hemos planteado un problema de origen geográfico-histórico, cuya automatización requiere manejar teoría de grafos elemental y cuya precisión requiere introducir nuevos nodos no previamente considerados y que lleva a utilizar un algoritmo de búsqueda de caminos mínimos.

Problemas como este pueden servir para justificar la introducción de la teoría de grafos o como acicate para estimular a profundizar en su estudio.

Bibliografía

[1] M. Abellanas, D. Lodares: Análisis de Algoritmos y Teoría de Grafos, Ed. Ra-Ma, Madrid, 1990.

[2] M. Casson: *The Evolution of the British Railway Network, 1825-1914, Full Research Report (2005), Full Research Report of the Award/Grant: The Evolution of the British Railway Network, 1825-1948*. Available at: URL: `http://www.esrcsocietytoday.ac.uk/ESRCInfoCentre/ViewAwardPage.aspx?AwardId=1782`

[3] G. Chartrand: *Introductory Graph Theory*, Dover, New York, 1985.

[4] A. Forcano: *Mapa de los Ferrocarriles en Explotación, Construcción y Proyecto en España y Portugal*, Instituto Geográfico y Catastral, Madrid, 1956.

[5] A. García-Álvarez: Evolución de la red desde 1964, Vía Libre 500 (2006) 196--201.

[6] M. Jiménez: En 1985 se cerraron más de 900 kilómetros de líneas altamente deficitarias, Vía Libre 484 (200) 86--87.

[7] E. Roanes Lozano, L.M. Laita, E. Roanes Macías, C. Roncero, J.L. Ruiz: Estudio matemático de la evolución de la topología de la red de ancho ibérico en España en

los últimos 50 años. En: *Actas del VII Congreso de Ingeniería del Transporte (CIT 2006)*. Univ. de Castilla–La Mancha, 2006.

[8] E. Roanes Lozano, L.M. Laita, E. Roanes Macías, M.J. Wester, J.L. Ruiz, C. Roncero: Evolution of Railway Network Flexibility: the Spanish Broad Gauge Case. *Mathematics and Computers in Simulation* (Aceptado para publicación, por aparecer en 2008).

[9] Anónimo: *Mapa ferroviario de España y planos de las principales poblaciones*, RENFE-Paraninfo, Madrid, 1974.

[10] Anónimo: *Atlas de los Ferrocarriles Españoles*, RENFE-Plaza & Janés, Barcelona, 1989.

[11] Anónimo: *Mapa de los Ferrocarriles Españoles*, RENFE-Plaza & Janés, Barcelona, 1989.

[12] Anónimo: Red Ferroviaria Española. Año 2006, Fundación de los Ferrocarriles Españoles, Madrid, 2006.

[13] URL: `http://www.bueker.net/trainspotting/maps_iberian-peninsula.php`

[14] URL: `http://en.wikipedia.org/wiki/Harry_Beck_(graphic_designer)`

[15] URL: `http://www.vialibre.org`

[16] URL: `http://en.wikipedia.org/wiki/East_Coast_Main_Line`

[17] URL: `http://en.wikipedia.org/wiki/West_Coast_Main_Line`

[18] URL: `http://wxmaxima.sourceforge.net/`

[19] URL: `http://www.juntaex.es/consejerias/economia-comercio-innovacion/dg-telecomunicaciones-sociedad-informacion/index-ides-idweb.html`

[20] URL: `http://www.ffe.es/home.htm`

Reseña de libros

AGUSTÍN CARRILLO DE ALBORNOZ TORRES (Coordinación) et al.: *Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didácticas.* Edita: SAEM THALES y CASIO, 2007. ISBN: 978-84-920056-9-7. Páginas: 178.

Esta publicación recoge las unidades didácticas premiadas en el Concurso GRAFICAL-2006, convocado en el XXV aniversario de la SAEM THALES.

A los profesores dispuestos a utilizar calculadoras gráficas en su quehacer diario, les agradará esta publicación, y a los que tienen sus consabidas reticencias, se les brinda esta oportunidad para cambiar de opinión. Para ello, vamos a transcribir el índice de las unidades didácticas desarrolladas y sus autores:

1. *Ecuaciones, inecuaciones y sistemas. Una aplicación económica de la función exponencial*, por J.M. Fernández Rodríguez y J. L. Iranzo.
2. *Funciones polinómicas y racionales*, por A.M. Carrión de la Fuente.
3. *La función polinómica de segundo grado*, por L. Barrios.
4. *Estadística bidimensional*, por M.T. Valdecantos.
5. *Funciones lineales y cuadráticas*, por A. Camacho, M.A. Guil y M.T. Valero.
6. *La calculadora gráfica*, por R. Ramírez y E. Sánchez Mingorance.
7. *Sistemas de ecuaciones*, por M.A. Frías.

Todas las unidades didácticas se inician con una introducción donde se indica para qué nivel de enseñanza y en qué tema se va a utilizar la calculadora gráfica. A continuación aparecen los objetivos y después el desarrollo de contenidos, en los que se detalla como explicar el tema usando la calculadora. Para finalizar se exponen los criterios de evaluación.

En la primera unidad didáctica el tema propuesto se presenta de un modo muy completo, pues se ofrecen todos los apartados estudiados, con gráficas y resultados, que han sido tomados directamente de la calculadora. En la segunda y tercera, se hace de modo similar, mostrando bastantes resultados y gráficas tomados directamente de la calculadora. Sin embargo, las restantes unidades didácticas, aunque también hacen uso de la calculadora, muestran menos resultados tomados directamente de pantalla.

El libro merece ser leído con todo detalle, para ver plasmados esos resultados y esas gráficas en nuestro trabajo con los alumnos.

Enrique Rubiales

VARIOS AUTORES: *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la Socioepistemología y la visualización en el aula.* ISBN 84-7978-786-4. Ediciones Díaz de Santos, 2007. Páginas: 325.

A mediados del siglo pasado, los trabajos y las publicaciones de J. Piaget llamaron la atención de lo que puede llamarse "gran público" de los educadores, y no solamente de los especialistas. Su intento de descubrir las reglas, si existen, del proceso por el que el conocimiento científico se instala en la mente del adulto, fue una base sobre la que otros autores, que particularizaban sus trabajos en la enseñanza de las Matemáticas en la edad Infantil y Primaria, iniciaron un cambio de perspectiva. La atención no se fijaba, sobre todo, en el mero concepto matemático, sino que se desparramaba hacia cosas como el ambiente social , la psicología del alumno, lo que se llamó psicología del aprendizaje, y los educadores se habituaron a palabras que no usaban en ese contexto: semántica oculta de los conceptos , teoría de las situaciones didácticas, Ingeniería Didáctica, epistemología científica, metacognición, metacontrato, ontosemiótica, y tantas otras. Sin duda, todo debido al interés de los educadores por aclarar y facilitar el aprendizaje del alumno; ahora no comentamos ni juzgamos sino que nos limitamos a describir.

Una de esas direcciones de trabajo teórico, sostiene que el conocimiento matemático es de naturaleza social. No interesa tanto la epistemología de los conceptos, sino la epistemología de las actividades sociales, especialmente, de las actividades sociales desarrollables en el aula, puesto que hablamos de trabajo escolar. El libro de referencia ejemplifica muy bien lo que significa todo eso y lo hace mediante el tratamiento de temas concretos. De las tres partes en que se divide el temario, la primera es la más extensa y, con doscientas páginas, viene a ocupar, aproximadamente, los dos tercios del total del libro. Su título general es *La Socioepistemología de la Matemática de la Variación*. Esa Matemática de la variación se particulariza en los capítulos siguientes:

1. La integral definida: un enfoque epistemológico.
2. Rediseño del Cálculo Integral escolar fundamentado en la predicción.
3. Lo periódico: una revisión en el marco de la Socioepistemología.
4. Un estudio didáctico relativo a la noción de convergencia.
5. Sobre la naturaleza y significados de los exponentes.
6. La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas.

En cada uno de esos trabajos, todos de investigadores mejicanos, hombres y mujeres, principalmente de las Universidades de Chiapas y de Guerrero, la metodología es la misma: para empezar, se expone la orientación que textos clásicos dan al tema; señalan después las dificultades que esa orientación producen en algunos alumnos y por último proponen otras orientaciones del tema que los autores consideran encajables en el marco de la socioepistemología. No se recogen resultados de ese modo de actuar, que, sin duda, serán expuestos en obras posteriores.

La segunda parte, de setenta páginas de extensión, se titula *Visualización y Registros de Representación*. El tema está ejemplificado en tres puntos:

7. Visualización y generalizaciones: el caso de la determinación de lugares geométricos.
8. Una alternativa para el tratamiento de ciertos límites de funciones trigonométricas: una secuencia didáctica.
9. La Geometría Analítica: ¿Cómo presentarla de manera interesante para los alumnos de educación media superior?

La metodología es la misma señalada para los trabajos de la primera parte. En particular, en el trabajo 8 se emplean siete páginas recordando textualmente el tratamiento que se hace en distintos textos. En ese trabajo, sí se presentan, también, algunos resultados obtenidos con la presentación preconizada por los autores.

Por último, la parte tercera, de cuarenta y cinco páginas, se titula *Aspectos del Lenguaje Proposicional y el Álgebra Lineal*. Esos aspectos están desarrollados en dos capítulos:

10. ¿Cómo propiciar el desarrollo de la habilidad para traducir enunciados del lenguaje natural al lenguaje de la lógica proposicional?
11. Diseño de actividades: ejemplos de Álgebra Lineal.

Puesto que la Didáctica de la Matemática no es un capítulo de la Matemática, todo trabajo sobre Didáctica, a cualquier nivel escolar, tiene partes discutibles y quizá en ello radique su encanto para quienes creen que lo tiene. Eso viene a significar que solamente la lectura personal debe decidir sobre la importancia de todo trabajo. Los que se publican en esta obra vienen avalados en portada por los Profesores Crisólogo Dolores, Gustavo Martínez, Rosa M. Farfán, Carolina Carrillo, Iván López y Catalina Navarro, Profesores o investigadores en la Universidad Autónoma de Guerrero (Méjico) y pertenecientes al CLAME (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa), todos ellos bien conocidos por sus numerosos trabajos en la materia. Participan en la obra otros dieciséis.

Alberto Aizpún

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de las copias en papel

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57,

58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77 y 78.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.